Maschinelles Lernen aus Stochastischer Sicht **Sommersemester 2024**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 03.05.2022, 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass im linearen Modell der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}$ mit dem Maximum-Likelihod-Schätzer $\hat{\beta}_{ML}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Führen Sie mit dem gegeben Datensatz eine mehrdimensionale lineare Regression durch. Verwenden Sie hierfür die Resultate von Blatt 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für binäre Daten $y_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$, mit Kovariablen $x^i = (x_1^i,\dots,x_d^i) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1,\dots,n$, ist das statistische Modell einer logistischen Regression gegeben durch

$$P = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Ber}\left(\pi\big((1,x^i)^\top \beta\big)\right),$$

für die Parameter $\beta = (\beta_0,\dots,\beta_d)$ und $\pi(x) = e^x/(1+e^x)$. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\beta}_{ML}$ die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\big((1,x^i)^\top \hat{\beta}_{ML}\big)$$

erfüllt und interpretieren Sie diese.

Hinweis: Der Maximum Likelihood Schätzer kann nicht explizit berechnet werden. Sie können durch Ableiten der Log-likelihood Funktion Gleichungen herleiten, welche dieser erfüllt. Die Existenz des Schätzers muss hierbei nicht gezeigt werden.