Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 12 (Bonus)

Abgabetermin: freiwillige Abgabe Donnerstag, 18.07.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Bonuspunkte)

Seien R, S kommutative Ringe mit Eins und $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Beweisen Sie die Teile (c)-(e) von Lemma 9.4, d.h. zeigen Sie, dass:

(a) φ ist injektiv genau dann, wenn $\text{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

(b) Ist $I \subset R$ ein Ideal und φ surjektiv, so ist $\varphi(I) \subset S$ ein Ideal.

(c) $\text{Bild}(\varphi)$ ist ein Unterring von S (d.h. ein Ring bzgl. der eingeschränkten Verknüpfungen, dessen Einselement durch 1_S gegeben ist).

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)

Beweisen Sie Lemma 9.14: Ist R ein kommutativer Ring mit Eins und $a, b \in R$, so gilt

$$a \stackrel{\wedge}{=} b \quad \Longleftrightarrow \quad a|b \text{ und } b|a \quad \Longleftrightarrow \quad (a) = (b).$$

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte)

Beweisen Sie Lemma 9.15: Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins, sowie $a_1, \dots, a_n \in R$. Dann gilt

(a) $\text{GGT}(a_1, \dots, a_n) = \text{GGT}(\text{GGT}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

(b) $d_1, d_2 \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \iff d_1|d_2 \text{ und } d_2|d_1 \iff d_1 \stackrel{\wedge}{=} d_2 \iff (d_1) = (d_2)$.

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)

Wir definieren den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \mathbb{Z} + \sqrt{-5}\mathbb{Z} := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel ist, jedoch kein Primelement.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter einem *Hauptidealring*?

(ii) Es sei R ein nullteilerfreier Ring. Wann wird ein Element $p \in R$ *Primelement* genannt und wann ist p *irreduzibel*? Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, in dem diese Begriffe äquivalent sind.

(iii) Definieren Sie den Begriff *Euklidischer Ring*.

(iv) Wozu dient der *euklidische Algorithmus*?

(v) Was besagt der *Elementarteilersatz über euklidischen Ringen*?