Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 11

Abgabetermin: Donnerstag, 11.07.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ endlichdimensionale euklidische Räume und $\varphi : V \longrightarrow W$ linear. Zeigen Sie:

(a) Ist B eine ONB von V und C eine ONB von W, so gilt
$$M_B^C(\varphi^{\mathrm{ad}}) = M_C^B(\varphi)^t.$$

(b) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{ad}}) = (\mathrm{Bild}(\varphi))^\perp$.

(c) Es gilt $\mathrm{Bild}(\varphi^{\mathrm{ad}}) = (\mathrm{Kern}(\varphi))^\perp$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subset R$ ein Ideal und $r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow r_1 - r_2 \in I$ und $\overline{r_1} := r_1 + I$ für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Außerdem definieren wir zwei Rechenoperationen
$$+ : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \qquad \overline{r} + \overline{s} = \overline{r + s}$$
und
$$\cdot : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \qquad \overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}.$$
Zeigen Sie:

(a) Die Addition und Multiplikation (s. oben) auf R/I sind wohldefiniert.

(b) $(R/I, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

(c) Die Abbildung $\pi : R \longrightarrow R/I$ mit $r \mapsto \overline{r}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) = I$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Seien $I, J \subset R$ Ideale. Zeigen Sie, dass es sich bei folgenden Mengen wieder um Ideale handelt:

(i) $I + J := \{r + s \mid r \in I, s \in J\}$.

(ii) $I \cap J$.

(iii) $\overline{I} := \{a \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\}$.

(b) Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R genau zwei verschiedene Ideale besitzt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Hauptidealring ist.

(b) Es sei R ein Ring mit Eins sowie ein Hauptidealring und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) p ist ein Primelement.

(ii) Der Restklassenring $R/(p)$ ist ein Körper.

Hinweis: Sie dürfen das Lemma von Bézout benutzen: Sei R ein Hauptidealring. Sind $a, b \in R$ und $d \in \mathrm{GGT}(a, b)$, dann existieren $u, v \in R$ mit $d = ua + vb$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter der *adjungierten Abbildung* einer linearen Abbildung φ zwischen euklidischen Vektorräumen V und W?

(ii) Was versteht man unter dem *kanonischen Isomorphismus* $\Psi : V \longrightarrow V^*$ eines euklidischen Vektorraums V?

(iii) Wie erkennt man anhand einer Darstellungsmatrix, ob eine lineare Abbildung *selbstadjungiert* ist?

(iv) Formulieren Sie den *Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen.*

(v) Was versteht man unter einem *Ideal*?

(vi) Formulieren Sie den *Homomorphiesatz für Ringe.*