# Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

## Blatt 10

**Abgabetermin:** Donnerstag, 04.07.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

(a) Zeigen Sie, dass eine ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ existiert, die nur aus Eigenvektoren von $A$ besteht. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte (d.h. $Av_i = \lambda_i v_i$), so gilt mit $Q = (v_1, \ldots, v_n)$ (Spaltenschreibweise), dass

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $A$ genau dann positiv definit ist, wenn $\lambda > 0$ für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

(a) Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass $f$ und $f^*$ die gleichen Eigenwerte besitzen und dass sogar für alle $\lambda \in K$

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{Id})) = \dim_K(\mathrm{Kern}(f^* - \lambda \mathrm{Id}^*))$$

(b) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller Folgen über $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Linksshift, d.h. $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$. Zeigen Sie, dass jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $f$ ist, $f^*$ jedoch keinen Eigenwert besitzt.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Seien $K$ ein Körper und $U, V, W$ $K$-Vektorräume.

(a) Seien $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeigen Sie, dass dann

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(b) Es gelte $\dim_K(V) = n < \infty$ und es seien $k \leq n$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ ist linear unabhängig in $V^*$.

(ii) Es gilt $\dim_K \left( \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i) \right) = n - k$.

(bitte wenden)

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

(a) Seien $\mathbb{R}[t]_n = \{P \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(P) \leq n\} \cup \{0\}$ und $d$ die Ableitungsabbildung aus Beispiel 4.35. Es sei $D_0(p) = p(0)$ und für $k = 1, \ldots, n$ seien Linearformen $D_k \in (\mathbb{R}[t]_n)^*$ definiert durch
$$D_k(p) := \frac{1}{k!} d^k(p)(0),$$
wobei $k! := k(k-1)\cdots 2 \cdot 1$ und $d^k$ wie üblich die $k$-fache Verkettung der Abbildung $d$ mit sich selbst beschreibt. Zeigen Sie, dass $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ die duale Basis zu $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ ist.

(b) Seien $V, W$ $K$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $f$ injektiv, so ist $f^*$ injektiv.
(ii) Ist $f$ surjektiv, so ist $f^*$ injektiv.
(iii Ist $f^*$ surjektiv, so ist $f$ injektiv.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(i) Formulieren Sie den Satz zur *Hauptachsentransformation*.

(ii) Definieren Sie den *Dualraum* $V^*$ eines Vektorraums $V$.

(iii) Definieren Sie die *duale Basis* einer Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$.

(iv) Was versteht man unter dem *Annulator* eines Untervektorraums $U$? Was wissen Sie über seine Dimension?

(v) Definieren Sie die *duale Abbildung* einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$.