Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, 18.06.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt sowie

$$U := \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix und $\mathrm{SR}(A)$ den Spaltenraum von A. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SR}(A)^\perp = \mathrm{Kern}(A^t) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}(A)^\perp = \mathrm{SR}(A^t),$$

wobei wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $Q \in \mathrm{O}(2)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $Q \in \mathrm{SO}(2)$ genau dann, wenn ein eindeutiges $\alpha \in [0, 2\pi)$ existiert mit

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Außer im Fall $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ besitzt Q keine reellen Eigenwerte.

(b) Es gilt $Q \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ genau dann, wenn ein eindeutiges $\alpha \in [0, 2\pi)$ existiert mit

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall besitzt Q die Eigenwerte ± 1 und es existiert eine ONB B von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $M_B^B(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Beschreiben Sie die Abbildung Q in (a) und (b) geometrisch.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ eine Darstellung der Form $v = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ besitzt, wobei $\alpha \in [0, 2\pi)$ eindeutig ist. Außerdem dürfen sie aus der Analysis bekannte Formeln für Sinus und Cosinus nutzen, wie z.B. die Additionstheoreme.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W, W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $V = W \oplus W^\perp$, insbesondere also $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$.

(b) $(W^\perp)^\perp = W$.

(c) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(d) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man darunter, dass die orthogonale Projektion $p_U(v)$ eine *Bestapproximation* von v mit Elementen aus U ist?

(ii) Wozu dient das *Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren*?

(iii) Definieren Sie die *Gramsche Determinante*.

(iv) Was versteht man unter einer *Isometrie*?

(v) Definieren Sie die *orthogonale Gruppe* und die *spezielle orthogonale Gruppe*.