# Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

## Blatt 8

**Abgabetermin:** Donnerstag, 20.06.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, in welchen der vorliegenden Fälle durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt definiert wird:

(i) $V = \mathbb{R}^2$ mit $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2$.

(ii) $V = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i\}$ mit

$$\langle (x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(iii) $V = \mathbb{R}[t]$ mit $\langle a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \dots b_m t^m \rangle = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_i b_i$.

(iv) $V = \mathbb{R}^2$ mit $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

(b) Seien $n \geq 2$ und $v = (v_1, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$, sowie $\|v\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$. Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_\infty$ die drei Normeigenschaften aus Satz 7.23 erfüllt, es jedoch kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\|v\|_\infty = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es sei $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_n)$ eine orthonormale Familie. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von $V$.

(ii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle \langle v_j, w \rangle$.

(iii) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle^2$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Es sei $V = M(n \times n, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle A, B \rangle_F = \mathrm{Spur}(B^t A)$ ein Skalarprodukt auf $V$ definiert wird.

Es bezeichne nun $\| \cdot \|_F$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ induzierte Norm auf $V$, sowie $\| \cdot \|_2$ die durch das Standard-Skalarprodukt induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(b) Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in V$, so gilt $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

(c) Für $A, B \in V$ gilt $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

(d) Für $A \in V$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$.

(bitte wenden)

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

(a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ positiv definit und $X \in M(n \times r, \mathbb{R})$ für $r \leq n$ mit $\text{Rang}(X) = r$. Zeigen Sie, dass $\text{Rang}(X^t AX) = r$.

(b) Beweisen Sie Satz 7.30 (ii): Es sei $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_r)$, so hat die orthogonale Projektion auf $U$ für $v \in V$ die Form

$$p_U(v) = (v_1, \ldots, v_r) \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_r \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_r, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_r, v_r \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_r, v \rangle \end{pmatrix},$$

wobei $(v_1, \ldots, v_r)x := v_1 x_1 + \cdots + v_r x_r$ für einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_r)^t \in \mathbb{R}^r$.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(i) Definieren Sie den Begriff *Skalarprodukt*.

(ii) Was versteht man unter einer *Orthonormalbasis*? In welchen Räumen existiert eine solche?

(iii) Definieren Sie die von einem Skalarprodukt abgeleitete *Norm* und nennen Sie ihre zentralen Eigenschaften.

(iv) Formulieren Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*.

(v) Was versteht man unter einer *Projektion*?