Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 13.06.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ und γ eine Bilinearform auf V mit

$$M_B^*(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $C = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V bildet und bestimmen Sie $M_C^*(\gamma)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $\gamma : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform. γ heißt *antisymmetrisch*, falls $\gamma(v, w) = -\gamma(w, v)$ für alle $v \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass γ genau dann antisymmetrisch ist, wenn $\gamma(v, v) = 0$ für alle $v \in V$.

(b) Es sei γ eine beliebige Bilinearform auf V. Zeigen Sie, dass eine symmetrische Bilinearform γ_s und eine antisymmetrische Bilinearform γ_a existieren mit $\gamma = \gamma_s + \gamma_a$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und γ eine symmetrische Bilinearform auf V. Wir definieren

$$V_0 := \{v \in V \mid \gamma(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_0 \subset V$ ein Untervektorraum ist.

(b) Es sei V/V_0 der Quotientenvektorraum aus Aufgabe 3 von Blatt 6 der Linearen Algebra I. Zeigen Sie, dass $\tilde{\gamma} : (V/V_0) \times (V/V_0) \longrightarrow K$ definiert durch

$$\tilde{\gamma}([v], [w]) := \gamma(v, w)$$

eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform auf V/V_0 ist.

(c) Es sei $[v] \in V/V_0$ mit $[v] \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $[w] \in V/V_0$ existiert mit $\tilde{\gamma}([v], [w]) \neq 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einer antisymmetrischen Bilinearform ω auf V (vgl. Aufgabe 2), für welche gilt: Ist $\omega(v,w) = 0$ für alle $w \in V$, so folgt $v = 0$. Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ von V heißt *Darboux-Basis*, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$\omega(v_i, v_j) = 0 = \omega(w_i, w_j) \quad \text{und} \quad \omega(v_i, w_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Darboux-Basis besitzt und damit insbesondere von gerader Dimension ist.
Hinweis: Folgen Sie der Argumentation von Lemma 7.9 und Satz 7.10.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie den Begriff *Bilinearform*.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

(iii) Es sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_2y_2$ und E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $M_E^*(\gamma)$.

(iv) Was versteht man unter einer *Orthonormalbasis* eines quadratischen Raums?

(v) Was besagt der *Sylvestersche Trägheitssatz*?