Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 6

Abgabetermin: Donnerstag, 06.06.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper und $P, Q \in K[t]$ Polynome. Wir sagen, dass P das Polynom Q *teilt*, falls ein $q \in K[t]$ existiert mit $Q = P \cdot q$. Weiter bezeichnen wir ein Polynom $R \in K[t]$ mit den Eigenschaften

(i) R ist normiert,

(ii) P teilt R und Q teilt R,

(iii) teilen P und Q beide das Polynom $T \in K[t]$, so folgt, dass auch R das Polynom T teilt,

als das *kleinste gemeinsame Vielfache* von P und Q und bezeichnen es mit $\mathrm{kgV}(P, Q)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{kgV}(P, Q)$ eindeutig durch (i)-(iii) bestimmt ist.

(b) Es seien M_1 und M_2 quadratische Matrizen über K und μ_{M_1}, μ_{M_2} die dazugehörigen Minimalpolynome. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

durch $\mathrm{kgV}(\mu_{M_1}, \mu_{M_2})$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix M aus (b) genau dann diagonalisierbar ist, wenn M_1 und M_2 beide diagonalisierbar sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $N \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix (d.h. die induzierte Abbildung $\tilde{N}$ ist nilpotent).

(a) Zeigen Sie, dass $\det(N + E_n) = 1$.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $N^{k-1} \neq 0$ und $N^k = 0$. Zeigen Sie, dass

$$(N + E_n)^{-1} = E_n - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{k-1} N^{k-1}.$$

(c) Es sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix, sodass $\det(E_n + xA) = 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_φ die n-te Potenz des Minimalpolynoms teilt, d.h. χ_φ teilt μ_φ^n.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien weiter $P, P_1, P_2 \in K[t]$ Polynome mit $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ und $P(\varphi) = 0$, sodass Polynome $Q_1, Q_2 \in K[t]$ existieren mit $Q_1(t)P_1(t) + Q_2(t)P_2(t) = 1$. Wir definieren nun $U_i := \mathrm{Kern}(P_i(\varphi))$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Wie hängt die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit seinem Minimalpolynom μ_φ zusammen?

(ii) Wie hängt die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit seinem charakteristischen Polynom χ_φ zusammen?

(iii) Was versteht man unter dem *algebraischen Abschluss* eines Körpers K?

(iv) Was versteht man unter einer *nilpotenten* linearen Abbildung?

(v) Was ist das Minimalpolynom einer nilpotenten Abbildung?