Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 31.05.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Minimalpolynome der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Prüfen Sie, ob die Matrizen A und B aus (a) invertierbar sind und bestimmen Sie (falls möglich) die Inverse mithilfe des Satzes von Cayley–Hamilton.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $P, Q \in K[t]$.

(a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von φ, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$.

(b) Beweisen Sie die letzte Aussage aus Bemerkung 6.29:

$$P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = (P \cdot Q)(\varphi).$$

(c) Sei $V = M(n \times n, K)$ der Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über dem Körper K. Es seien $A \in M(n \times n, K)$ fest gewählt und $T : M(n \times n, K) \longrightarrow M(n \times n, K)$ die durch $T(B) = AB$ definierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Minimalpolynome von T und A übereinstimmen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r \leq n$. Zeigen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r + 1$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 1$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Zeigen Sie, dass ein Untervektorraum $W \subset V$ existiert mit $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 2$ und $\varphi(W) \subset W$.
Was können Sie sagen, falls V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 1$?

Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 2 von Blatt 6 der linearen Algebra I und nutzen Sie den Satz von Cayley–Hamilton.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Formulieren Sie den Satz über die *Eigenraumzerlegung*.

(ii) Formulieren Sie den *Satz von Cayley–Hamilton*.

(iii) Was versteht man unter dem *Minimalpolynom* eines Endomorphismus φ?

(iv) Was ist über die Nullstellen des Minimalpolynoms bekannt?

(v) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$