Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 4

Abgabetermin: Donnerstag, 16.05.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie dabei alle Matrizen über dem Körper der reellen Zahlen auf.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis bezüglich der A die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

besitzt und bestimmen Sie S mit $D = SAS^{-1}$.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = S^{-1}D^nS$ und geben Sie A^n explizit an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n; \mathbb{R}) \subset M(n \times n; \mathbb{C})$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A^t = A$. Zeigen sie, dass A, aufgefasst als Element von $M(n \times n; \mathbb{C})$ ausschließlich reelle Eigenwerte besitzt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Eine Menge $M \subset \mathrm{End}_K(V)$ heißt *simultan diagonalisierbar*, falls eine Basis B von V existiert, sodass $M_B(f)$ für alle $f \in M$ Diagonalgestalt hat. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass eine Menge $M \subset \mathrm{End}_K(V)$ genau dann simultan diagonalisierbar ist, wenn die Elemente von M (separat) diagonalisierbar sind und miteinander kommutieren (d.h. $f \circ g = g \circ f$ für alle $f, g \in M$).

(a) Beweisen Sie die Richtung $\Longrightarrow$.

Gehen Sie für die folgenden Aufgabenteile von den Voraussetzungen der Richtung $\Longleftarrow$ aus und beweisen Sie das Folgende:

(b) Für alle $f, g \in M$ und alle Eigenwerte λ von f gilt $g(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \subset \mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

(c) Seien $f, g \in M$ beliebig und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Eigenwerte von f mit zugehörigen Eigenräumen $V_j := \mathrm{Eig}(f, \lambda_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt für jeden Eigenwert μ von g

$$\mathrm{Eig}(g, \mu) = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Eig}(g, \mu) \cap V_j.$$

(d) Seien f, g und V_j wie in (c). Dann sind für jedes $j = 1, \ldots, m$ die Einschränkungen

$$\left\{ g|_{V_j} : V_j \longrightarrow V_j \mid g \in M \right\}$$

separat diagonalisierbar und kommutieren miteinander.

(e) Folgern Sie nun $\Longleftarrow$ der ursprünglichen Aussage.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Wie hängen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_φ mit den Eigenwerten von φ zusammen?

(ii) Definieren Sie die *Vielfachheit* einer Nullstelle eines Polynoms.

(iii) Definieren Sie die *geometrische Vielfachheit* und die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwerts.

(iv) In welcher Relation stehen die *geometrische* und *algebraische* Vielfachheit eines Eigenwerts zueinander?

(v) Nennen Sie ein äquivalentes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus φ.