Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei V endlichdimensional, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und B eine Basis von V. Wie in Definition 6.11 setzen wir

$$\det(\varphi) := \det\left(M_B(\varphi)\right).$$

Beweisen Sie Lemma 6.11, d.h. zeigen Sie, dass $\det(\varphi)$ wohldefiniert ist (d.h. $\det\left(M_B(\varphi)\right)$ nicht von der Wahl der Basis B abhängt) und dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\det(\varphi) \neq 0$.

(b) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n \times n; \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, d.h. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Beweisen Sie:

- A^{-1} hat Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.
- A^{-1} hat genau dann Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, wenn $\det(A) = \pm 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie Lemma 6.18:

(a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in M(n \times n; K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Spur eines Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, also $\mathrm{Spur}(\varphi)$, wohldefiniert ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Spur}(\psi \circ \varphi)$ für $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(d) $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ habe $n = \dim_K(V)$ verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, sowie $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$ und ist $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für einen Endomorphismus f schreiben wir $f^2 := f \circ f$ und induktiv $f^n := f \circ f^{n-1}$.

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $f^2 = f$. Welche Eigenwerte kann f annehmen?

(b) Es sei V ein K-Vektorraum und $g \in \mathrm{End}_K(V)$, sodass $g^2 + g$ den Eigenwert -1 besitzt. Zeigen Sie, dass g^3 dann den Eigenwert 1 hat.

(c) Betrachten Sie den Polynomraum $\mathbb{R}[t]_n$ und die lineare Abbildung $I : \mathbb{R}[t]_n \longrightarrow \mathbb{R}_n[t]$, welche durch

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \;\mapsto\; \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^k$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass I diagonalisierbar ist und bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von I.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Formulieren Sie die *Cramersche Regel*.

(iii) Definieren Sie die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenvektor* einer Matrix A.

(iv) Wann heißt eine Matrix *diagonalisierbar*?

(v) Zeigen Sie für $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$, dass

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{Id}_V - \varphi).$$

(vi) Definieren Sie das *charakteristische Polynom* einer Matrix $A \in M(n \times n; K)$.