Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Blatt 2

Abgabetermin: Donnerstag, 02.05.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper mit $-1 = 1$. Beweisen Sie, dass die durch die Leibniz-Formel definierte Funktion die Axiome (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Erinnern Sie sich an die Zyklenschreibweise für Elemente $\sigma \in S_n$, die in Bemerkung 2.13 eingeführt wurde.

(a) Sei $m \leq n$, $\tau = (t_1 t_2 \cdots t_m) \in S_n$ und $\sigma \in S_n$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$\sigma \circ (t_1 t_2 \cdots t_m) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(t_1)\sigma(t_2) \cdots \sigma(t_m)) .$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $\sigma \in S_n$ ein $k \in \mathbb{N}$ und dazugehörige Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \{(12), (23), (34), \ldots, ((n-1)n)\}$ existieren mit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes Element $\sigma \in S_n$ ein $l \in \mathbb{N}$ und dazugehörige Permutationen $\tau_1, \ldots, \tau_l \in \{(12), (1234 \cdots n)\}$ existieren mit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $v = (v_1, v_2) \in K^2$ und $w = (w_1, w_2) \in K^2$ mit $v \neq w$, sowie $L \subset K^2$ die Gerade durch die Punkte v und w. Zeigen Sie, dass

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in K^2 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) .$$

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter der *symmetrischen Gruppe* S_n?

(ii) Geben Sie die *Leibniz-Formel* zur Berechnung der Determinante an.

(iii) Was besagt die *Regel von Sarrus*?

(iv) Was versteht man unter einem *Fehlstand* einer Permutation $\sigma \in S_n$?

(v) Wie ist das *Vorzeichen* einer Permutation $\sigma \in S_n$ definiert? Was ist das Vorzeichen der Permutation (14253)?