

## Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II“

### Blatt 1

**Abgabetermin:** Donnerstag, 25.04.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.  
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

#### Aufgabe 1

(4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, K)$$

für  $K = \mathbb{Q}$ ,  $K = F_7$  und  $K = F_{13}$ .

(b) Für welche Werte von  $x \in \mathbb{R}$  verschwindet die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})?$$

#### Aufgabe 2

(4 Punkte)

Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a)  $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$ .

(b) Ist  $B$  invertierbar, so gilt  $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$ .

(c) Ist  $A$  invertierbar und sind  $C, D \in M(n \times n, \mathbb{R})$ , so gilt die folgende Formel für die Determinante einer Blockmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

#### Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Determinante von  $A$ .

#### Aufgabe 4

(4 Punkte)

Es sei  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$  eine Matrix und  $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  definiert durch  $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Zeigen Sie, dass  $\det(A) = \det(\hat{A})$ .

(bitte wenden)

### **Aufgaben zur Selbstkontrolle**

- (i) Durch welche drei Eigenschaften ist eine *Determinante* axiomatisch definiert?
- (ii) Wie ist die Linearität der Determinante geometrisch motiviert?
- (iii) Wie ist die alternierende Eigenschaft einer Determinante geometrisch motiviert?
- (iv) Wie wirkt sich die Vertauschung zweier Zeilen einer Matrix auf deren Determinante aus?
- (v) Wie berechnet man die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix?