Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 28.04.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ heißt Verteilungsunktion. Ist μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt $F_\mu : x \mapsto \mu((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von μ.

Zeigen Sie: Die Abbildung $\mu \mapsto F_\mu$ ist eine Bijektion von der Menge der W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf die Menge der Verteilungsfunktionen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Abbildung und sei $\mathcal{R}$ ein Ring bzw. Algebra bzw. σ-Algebra über Y. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{R}\}$$

ein Ring bzw. Algebra bzw. σ-Algebra über X ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $\sigma(f)$ die von f bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugte σ-Algebra. Bestimmen Sie alle $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei σ-Algebren auf einer Menge Ω. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} := \{C | C \in \mathscr{A} \vee C \in \mathscr{B}\}$ ist eine σ-Algebra.
2. $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} := \{C | C \in \mathscr{A} \wedge C \in \mathscr{B}\}$ ist eine σ-Algebra.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Sei Ω eine endliche Menge, sei $|\Omega| \geq 4$ und gerade. Setze

$$\mathcal{D} := \{D \subset \Omega \,|\ \ |D| \in 2\mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 6 (Bonus 4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{R} \subset 2^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ ist ein Ring im Sinne der Algebra.

(b) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A\Delta B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

(c) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A\Delta B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(d) $\mathcal{R}$ ist ein Ring im Sinne der Maßtheorie.

Hinweis: Dabei ist $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *die symmetrische Differenz.*