Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 23.06.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien N, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ und $dP^{X_n} = f_n d\lambda$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $S_N := \sum_{n=1}^N X_n$ ist messbar,

(b) die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)(f_1 * \ldots * f_n)(x)$$

ist eine Lebesguedichte von P^{S_N}.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Verteilungsklassen auf Faltungsstabilität.

(a) $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, die Klasse der Normalverteilungen mit Erwartungswert 0.

(b) $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda > 0\}$, die Klasse der Exponentialverteilungen.

Eine Klasse M von Verteilungen heißt stabil unter Faltung, wenn für alle $\mu, \nu \in M$ gilt, dass $\mu * \nu \in M$.

Zur Erinnerung: Die oben genannten Verteilungen sind gegeben durch ihre Dichten

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ und}$$

$$f_{Exp(\lambda)}(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bezeichne mit $\mathscr{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ und definieren folgende σ-Algebren (Produkt- und Borel-σ-Algebra):

$$\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\pi_t^{-1}(A) | t \in [0,\infty), A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) := \sigma(O | O \in \mathscr{O}).$$

1. Zeigen Sie, dass

$$\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \{\pi_J^{-1}(A^J) | J \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}, A^J \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^J)\}$$

2. Zeigen Sie, dass $A \in \bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $A \subseteq C([0,\infty))$ impliziert, dass $A = \emptyset$. Hierbei bezeichne $C([0,\infty))$ die stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}$.
3. Zeigen Sie weiter, dass Einpunktmengen $\{\omega\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ für $\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$.
4. Zeigen Sie, dass $\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ eine strikte Inklusion ist. Ist dies ein Widerspruch zu Lemma A.57?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Produkttopologie $\mathscr{O}$ auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ durch die gröbste Topologie, sodass alle Projektion $\pi_t : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$, stetig sind, charakterisiert werden kann.

Definition 1. Eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in(0,\infty]}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißt Brownsche Bewegung, falls:

1. Für jede Wahl von $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n$ gilt, dass $X_{t_0} = 0$ und $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ verteilt sind.
2. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und einer Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in(0,\infty]}$, die 1. aus Definition 1 erfüllen. Definieren Sie dafür $\Omega = \mathbb{R}^{[0,\infty)}$, $\mathscr{F} = \bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X_t = \pi_t$ die Projektion auf die t'te Komponente. Definieren Sie nun über einen projektiven Limes das zugehörige Maß P. Betrachten Sie dafür für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $S_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$ und für $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [0,\infty)$ mit $|J| = n$ das Maß

$$P_J = (S_n)_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}),\ t_0 := 0.$$

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Sind X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Dichte f_X und f_Y bzgl. λ. So hat $X + Y$ die Dichte $f_X * f_Y$ gegeben durch

$$f_X * f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(x - y) \lambda(dy).$$