UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 26.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte Bonus). Zeigen Sie, dass eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] = 0. \tag{1}$$

Folgern Sie damit Korollar 27.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathscr{F}$. Es sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ , \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P\Big[\text{ Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n \Big] = 0.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für die folgenden Identitäten:

1. $P(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\}) = P(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\})$.
2. $P(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}) = \limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\})$.
3. $\limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = P(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\})$.

Aufgabe 5 (4 + 2 Punkte). Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Zeigen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra liegen.

1. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
2. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,

3. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
4. $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
5. $\{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$,
6. $\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} S_n(\omega)\}$.

Hinweis: Jeder Teil dieser Aufgabe gibt einen Punkt. Damit sind hier 2 Bonuspunkte möglich.