Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 07.07.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z} : P(Y_n = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Y = j).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \in (0, \infty)$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n exponentialverteilt mit Parameter α_n ist, d.h. X_n besitzt die Dichte

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\alpha_n e^{-\alpha_n x}.$$

Zeigen Sie die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$, falls $\alpha_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es einen Homeomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und den Dirac Maßen auf $\mathbb{R}$ mit der schwachen Konvergenz gibt.