Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 12.05.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien (X_n) eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen und X eine weitere $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, so gilt

(a)
$$X_n \overset{f.s.}{\to} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \Leftrightarrow \sup_{m\geq n} |X_m - X| \overset{P}{\to} 0$$

(b) konvergiert $X_n \overset{f.s.}{\to} X$, so auch stochastisch ($X_n \overset{P}{\to} X$).

(c) Stochastisches Cauchy-Kriterium. Sind die (X_n) P-fast sicher konvergent, so ist das äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{|X_{m+n} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller, integrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $X_n \to_P X$, $Y_n \to_P Y$ und $Z_n \to_P Z$. Zeigen Sie:

(a) $X_n + Y_n \to_P X + Y$.

(b) Gilt zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$, so folgt $E[Y_n] \to E[Y]$.

Hinweis: Verwenden Sie für b) Theorem 22.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie folgendes Glücksspiel: Wenn Ihr Kapital vor der n-ten Runde K_{n-1} beträgt, gewinnen Sie in der n-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze $\frac{5}{3}K_{n-1}$, sofern Kopf erscheint, sonst erhalten Sie $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

(a) Berechnen Sie EK_n, und überzeugen Sie sich, dass $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass K_n stochastisch gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$ mit stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i. Betrachten Sie in Teil b) die Zufallsvariable $\log K_n$ und wenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, P-fast-sichere und L^p-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?