Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 14.07.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ für alle $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

i) Ist $(X_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar und $(\mathscr{F}_j)_{j\in J}$ eine Famile von Unter-σ-Algebren von $\mathscr{A}$. Dann ist die Familie $(E[X_i|\mathscr{F}_j])_{i\in I, j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

ii) Ist $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$, dann ist $(E\left[X|\mathscr{F}_j\right])_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in *i)* im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Auf einer Ebene bilden Geraden im horizontalen und vertikalen Abstand 1 ein Schachbrettmuster. Es werden Nadeln der Länge 1 rein zufällig auf die Ebene geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene Nadel keine der Geraden schneidet? *Hinweis: Definieren Sie die Zufallsvariable Z durch*

$$Z = \begin{cases} 1, & \textit{falls die Nadel eine Gerade schneidet,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei der Mittelpunkt der Nadel X von der linken Geraden und Y von der unteren Geraden entfernt und die Verlängerung der Nadel geht einen spitzen Winkel Θ mit der linken Gerade ein. Dann sind X und Y uniform auf $[0, 1]$ verteilt und Θ uniform auf $[0, \pi/2]$, wobei X, Y, Θ unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Finden sie ein Beispiel für eine Zufallsvariable X und σ-Algebren $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$, sodass

$$E[E[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}] \neq E[E[X|\mathscr{G}]|\mathscr{F}].$$