Abteilung für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. Angelika Rohde Johannes Brutsche, M.Sc.

Themenliste Analysis I und II zur Vorlesung 2018/19

Im Folgenden finden Sie eine kurze Auflistung aller in den Vorlesungen behandelten Themen mitsamt den wichtigsten Sätzen.

1. **Konstruktion der reellen Zahlen** mithilfe des Vollständigkeitsaxiom, der Körper- und Anordnungsaxiome, Supremum und Infimum, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Vollständige Induktion und elementare Ungleichungen, binomische Formel, Archimedisches Prinzip.

2. **Konvergente Folgen**. Definition von Folge, Nullfolge, (bestimmter) Divergenz sowie Konvergenz von Folgen. Rechenregeln für Grenzwert und klassische Beispiele (z.B. $\sqrt[n]{n}$) sowie Eigenschaften konvergenter Folgen. Cauchy- und Monotoniekriterium für Konvergenz, Satz von Bolzano-Weierstraß, Intervallschachtelungsprinzip.

3. **Unendliche Reihe.** Definition der Reihe, klassische Beispiele wie geometrische, harmonische Reihe und Exponentialreihe. Konvergenzkriterien.

4. **Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit.** Wiederholung Abbildung. Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung und Verkettung. Definition Gleichmächtigkeit und Abzählbarkeit sowie Kriterien und Eigenschaften. $\mathbb{R}$ überabzählbar, $\mathbb{Q}$ jedoch abzählbar.

5. **Umordnungen.** Kleiner und großer Umordnungssatz. Summierbarkeit von Scharen und Doppelreihen als Spezialfall. Distributivgesetz für Reihen.

6. **Topologische Grundbegriff in $\mathbb{R}$.** Offene, abgeschlossene Mengen, Häufungspunkte. Kriterien, äquivalente Formulierungen, Beispiele und Eigenschaften. Bolzano-Weierstrass.

7. **Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit.** Definition des Grenzwertbegriffs für Funktionen, Kriterien und Rechenregeln. Stetigkeit und äquivalente Formulierungen. Eigenschaften und Rechenregeln für stetige Funktionen, Stetigkeit der Umkehrfunktion, stetige Fortsetzbarkeit. Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum und Minimum. Einführung von log.

8. **Differenzierbare Funktionen.** Differenzenquotient und Ableitung, Rechenregeln, Beispiele und Eigenschaften. Ableitung der Umkehrfunktion, Satz von Rolle, Mittelwertsatz. Extremwertbestimmung und höhere Ableitungen. Satz von Taylor und Restgliedformeln. Regel von l'Hospital. Monotonie und Konvexität.

9. **Punktweise und gleichmäßige Konvergenz.** Definitionen. Cauchy'sches, Weierstrass'sches und Abelsches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Grenzfunktion.

10. **Potenzreihen.** Konvergenzradius und Verhalten auf dem Rand. Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit im Konvergenzbereich, Identitätssatz. Rechenregeln, Taylorreihe, Entwickelbarkeit in Potenzreihen. Hyperbelfunktionen, trigonometrische Funktionen, ihre Eigenschaften und Umkehrfunktionen.

11. **Riemann-Integral.** Definition mittels Ober- und Untersummen. Riemannsummen und Riemann'sches Integrabilitätskriterium, Eigenschaften und Rechenregeln des Integrals. Stammfunktionen, partielle Integration und Substitution, Hauptsatz der

Differential- und Integralrechnung, Mittelwertsatz der Integralrechnung. Beschränkte und Lipschitz-stetige Funktionen. Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral. Wallis'sche Produktformel und Stirlingformel. Unbestimmte und uneigentliche Integrale, Minoranten- und Majorantenkriterium für deren Existenz. Integralkriterium für Reihen.

12. **Normierte lineare Räume.** Normen und Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$. Beispiele von Normen auf $\mathbb{R}^n$ und den typischen Funktionenräumen. Grenzwerte und Folgen in normierten Räumen, Vollständigkeit, Banachräume. Topologie in normierten Vektorräumen, insbesondere Kompaktheit, Folgenkompaktheit, deren Äquivalenz und der Satz von Heine-Borel im $\mathbb{R}^n$. Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Hölder-Stetigkeit und deren Eigenschaften wie Maxima stetiger Funktionen auf kompaktem Definitionsbereich. Produkträume und Metriken.

13. **Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$.** Verschiedenen Ableitungsbegriffe, Zusammenhänge von diesen, Rechenregeln, Satz von Schwarz. Gradient und Hessematrix, mehrdimensionale Extremwerttheorie, mehrdimensionale Taylorformel. Satz von der impliziten Funktion, Ableitung der impliziten Funktion, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Extrema unter Nebenbedingungen, Lagrange-Multiplikatoren.

14. **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Definition, Eindeutigkeit, Lemma von Gronwall.