Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 05.07.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0,0) = 0$ und für $(x, y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden* $y = ax$ *stetig*, d.h. aus $x_n \to 0$ folgt $f(x_n, ax_n) \to f(0,0) = 0$.

(b) f ist im Nullpunkt unstetig.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien E, F normierte Vektorräume und $S \subset E$. Eine Funktion $f : S \to F$ heißt *Hölder-stetig zur Ordnung* $\alpha > 0$, falls es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x, y \in S$ gilt

$$||f(x) - f(y)||_F \leq C||x - y||_E^\alpha.$$

(a) Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls $\alpha > 1$ gilt. Es genügt also, $\alpha \in (0,1]$ zu betrachten.
HINWEIS: Drücken Sie die Differenz $f(x) - f(y)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ als Teleskopsumme an den Stützstellen $a_i = x + \frac{i}{n}(y - x)$ aus.

(b) Zeigen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $a \in (0,1)$ und

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\log(x)} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

zwar gleichmäßig stetig, jedoch nicht Hölder-stetig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit G offen, eine in $\xi \in \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ und eine Konstante $L > 0$ existieren, sodass für alle $x \in U_\delta(\xi)$ stets gilt

$$||f(x) - f(\xi)|| \leq L||x - \xi||.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind und bestimmen Sie die lineare Abbildung $\lambda(h)$ und den Rest $r(h)$ aus der Definition der Differenzierbarkeit.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y,$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (\cos(x), \sin(x))^\top.$