Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 6

Abgabetermin: Freitag, 07.06.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)} \quad \int_0^\pi \sin(x)^2 dx, \quad \text{(b)} \quad \int_1^e \frac{\log(x)}{x} dx, \quad \text{(c)} \quad \int_0^\pi \cos(x) e^x dx.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie für $x > 0$ das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Zeigen Sie die Konvergenz des Integrals.

(b) Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Folgern Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $f : [p, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche für jedes $x \geq p$ auf dem Intervall $[p, x]$ Riemann-integrierbar ist, sowie monoton fallend und $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq p$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_p^\infty f(x) dx \;\text{ konvergiert } \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=p}^\infty f(n) \;\text{ konvergiert,}$$

und dass im Falle der Konvergenz gilt

$$\sum_{n=p+1}^\infty f(n) \leq \int_p^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=p}^\infty f(n).$$

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log(n)^c}$$

für $c > 1$ konvergiert und für $c = 1$ divergiert.
Hinweis: Nutzen Sie zur Integralauswertung die Substitution $x \mapsto e^t$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Beweis der Stirling-Formel aus der Vorlesung zu vervollständigen. Dazu sei wie in der Vorlesung

$$C := \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \quad \text{und} \quad \rho_n := \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu$$

mit

$$c_\nu := \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{t^2}{\nu^2}\right) dt \leq 0.$$

Zeigen Sie nun die folgenden fehlenden Teile mithilfe der Anleitung im Hinweis:

(a) $0 < \rho_n < \frac{1}{12n}$.
Hinweis: Aus dem Vorlesungsbeweis wissen Sie, dass

$$\log(n+1) = \log((n+1)!) - \log(n!) = \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) - 1 + \rho_{n+1} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n) - \rho_n.$$

Leiten Sie hieraus die Abschätzung

$$\rho_n - \rho_{n+1} \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

her. Dabei ist Aufgabe 4(b) von Blatt 5 mit $x = \frac{1}{2n+1}$ hilfreich. Zeigen Sie anschließend, dass $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist und dass $\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0$ gilt, wobei sie für letzteres eine Taylorabschätzung von $\log(1+x)$ benötigen. Folgern Sie nun alle Behauptungen.

(b) $C = \log(\sqrt{2\pi})$.
Hinweis: Sie kennen aus der Vorlesung das Wallis'sche Produkt

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Berechnen Sie hiermit $\frac{1}{2}\log(\pi)$ und nutzen Sie, dass $\log(n!) = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + C + \rho_n$, was Sie bereits aus der Vorlesung wissen (und damit nicht zeigen müssen).