

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe  
 Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi  
<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018>

### Übung 3

**Abgabe: 5.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.**

Wir sammeln zunächst einige Definitionen. Insbesondere verfeinern wir das Konzept von wesentlichen Klassen. Wir fixieren eine Markov-Kette  $X$  mit Zustandsraum  $E$ .

**Definition 1.** Eine Teilmenge  $C \subset E$  heißt abgeschlossen, falls für jedes  $i \in C$  mit  $i \rightarrow j$  folgt dass  $j \in C$  ist.

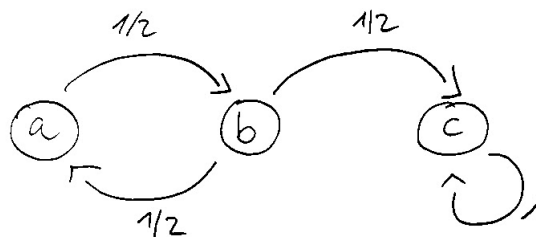
**Definition 2.** Ein Zustand  $i \in E$  heißt unwesentlich, falls es ein  $j \in E$  gibt mit  $i \rightarrow j$  aber  $j \not\rightarrow i$ . Ansonsten nennen wir  $i$  wesentlich. Die Menge aller unwesentlicher Zustände nennen wir unwesentliche Klasse. Eine Teilmenge aus  $E$  heißt wesentliche Klasse (dies ist jetzt eine andere Definition als auf dem vorigen Blatt), falls alle Elemente miteinander kommunizieren und die Teilmenge abgeschlossen ist.

**Definition 3.** Für einen Zustand  $i \in E$  ist die Periode  $d_i$  definiert durch

$$d_i := \text{ggT} \{ n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0 \},$$

mit der Konvention  $d_i = +\infty$  falls  $p_{ii}^{(n)} = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Für  $d_i = 1$  heißt  $i$  aperiodisch.

**Aufgabe 1** (2 Punkte). Betrachten Sie eine Markov-Kette  $X$  mit folgendem Übergangsgraphen:



Bestimmen Sie die unwesentliche Klasse. Bestimmen Sie auch die wesentliche(n) Klasse(n) einmal gemäß der obigen Definition und einmal nach der Definition welche sich auf dem vorigen Blatt befand. Bestimmen Sie die Periode für jeden Zustand. Bestimmen Sie ferner die Mengen  $\mathcal{G}_i$  aus Definition 2.1.7.

**Aufgabe 2** (2 Punkte). Es sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

**Bitte wenden**

gegeben. Stellen Sie die Markov-Kette graphisch dar. Bestimmen Sie die Perioden der einzelnen Zustände und geben Sie die wesentlichen und die unwesentlichen Klassen der Markov-Kette an. Bestimmen Sie ferner die Mengen  $\mathcal{G}_i$  aus Definition 2.1.7.

**Aufgabe 3** (4 Punkte).

Es sei  $X_1, X_2, X_3 \dots$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \text{ und } \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Seien ferner  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  und  $M_n = \max\{S_k | 0 \leq k \leq n\}$ .

1. Zeigen Sie, dass  $Y_n = M_n - S_n$  eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.
2. Zeigen Sie, dass  $M_n = Y_n + S_n$  keine Markov-Kette ist. (Also: die Summe zweier Markov-Ketten muss keine Markov-Kette sein.)

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Es sei  $(I, \mathcal{I})$  ein messbarer Raum, wobei  $I$  eine abzählbare Menge ist. Eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  von  $I$ -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  wird *Markov-Kette  $r$ -ter Ordnung* genannt, falls für alle  $B \in \mathcal{I}$  und alle ganzzahligen  $n \geq r - 1$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, m \leq n)) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, n - r + 1 \leq m \leq n)).$$

Zeigen Sie, dass die Folge  $Y_n := (X_n, \dots, X_{n+r-1})$  eine  $I^r$ -wertige Markov-Kette im "gewöhnlichen Sinne" ist.

**Aufgabe 5** (4 Punkte).

Es sei eine Markov-Kette  $X$  mit Zustandsraum  $S = \{1, 2\}$  gegeben. Ihre Übergangsmatrix sei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, indem Sie die Markoveigenschaft von  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  verwenden, dass

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} = (\alpha + \beta - 1) \left( \mathbb{P}(X_n = 1) - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right).$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} + (\alpha + \beta - 1)^n \left( \mathbb{P}(X_0 = 1) - \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta} \right)$$

gelten muss.

*Bemerkung:* Dies zeigt, dass für  $0 < 2 - \alpha - \beta < 2$  die Verteilung  $(\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$  exponentiell gegen  $(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta})$  konvergiert. Machen Sie sich klar, was passiert wenn man  $(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta})$  als Startverteilung der MK wählt.

**Aufgabe 6** (2 Punkte). Zeigen Sie/ widerlegen Sie die Irreduzibilität der Beispiele 1.6.1 bis 1.6.6 explizit, d.h. weisen Sie die Bedingungen der Definition nach.