Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 9

Abgabetermin: 30.06.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 33 (4+2 Punkte)

Zeigen Sie Proposition 2.7 (Orthogonalität und Unabhängigkeit) aus der Vorlesung für $N \in \mathbb{N}$: Sei $N \in \mathbb{N}$. Seien M^n, $n \leq N$, stark orthogonale stetige lokale Martingale bezüglich einer gemeinsamen Filtration $\mathcal{F}$ mit $M_0^n = 0$. Dann existieren unabhängige Brownsche Bewegungen B^n, $n \leq N$, so dass

$$M^n = B^n \circ [M^n] \tag{1}$$

fast sicher für alle $n \leq N$.

Hinweis: Eine Familie von stetigen lokalen Martingalen M^n, $n \in \mathbb{N}$, heißt *stark orthogonal*, falls $[M^i, M^j] = 0$ fast sicher für alle $i \neq j$.
Erweiterung von Lemma 2.10: Unter den Bedingungen von Lemma 2.10 (mit $d = 1$) gilt für ein lokales Martingal M mit $[M]_\infty = \infty$ und $B_t = M_{\tau_t}$, dass ein $U \in L(M)$ existiert mit $\xi = (U \cdot M)_\infty$ f.s. .
Nehmen Sie zunächst an, dass $[M^n]_\infty = \infty$ für alle n gilt. Zeigen Sie dann, dass es Brownsche Bewegungen B^n gibt, die (1) erfüllen. Zeigen Sie anschließend, dass diese unabhängig sind, indem sie die Unabhängigkeit von $\mathcal{F}_\infty^{B^n}$-messbaren Zufallsvariablen X^n zeigen. Verwenden Sie dafür die Erweitung von Lemma 2.10, die Itô-Formel und die Eigenschaft $\mathbb{E}\int_0^\infty \left(\prod_{m\neq n} X_s^m U_s^n\right)^2 d[M^n]_s < \infty$ für alle n, wobei $X_t^m = \int_0^t U_s^m dM_s^m$ mit U^m aus der Erweiterung von Lemma 2.10 ist (ohne Beweis).
Um das Resultat auf allgemeine M^n zu erweitern, gehen Sie für M^n mit $[M^n]_\infty < \infty$ zum Prozess $N^n = M^n_{\psi(t)} + X^n_{(t-1)_+}$ über, wobei $\psi(t) = -\log(1-t)_+$ und X^n eine unabhängige Brownsche Bewegung ist. Verwenden Sie nun einen geeigneten Zeitwechsel und das Resultat für $[M^n]_\infty = \infty$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ und X eine Lösung der Gleichung

$$dX = a(X)dt + b(X)dW + c(X)dW'$$

für unabhängige Brown'sche Bewegungen W, W'.

Zeigen Sie, dass eine Brown'sche Bewegung W'' existiert, sodass X die Gleichung

$$dX = a(X)dt + \sqrt{b^2(X) + c^2(X)}dW''$$

erfüllt.

Aufgabe 35 (4+2 Punkte)

a) Es sei $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und seien $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:
Wenn $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ und X eine $\mathbf{Q}$-integrierbare Zufallsvariable, dann gilt mit der zugehörigen Radon-Nikodym-Dichte Λ, dass ΛX $\mathbf{P}$-integrierbar ist und

$$\mathbf{E_Q}[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbf{E_P}[\Lambda X|\mathcal{G}]}{\mathbf{E_P}[\Lambda|\mathcal{G}]} \quad \mathbf{Q} - \text{fast sicher.}$$

b) Es sei $(\Lambda_t)_{0\le t\le T}$ ein $\mathbf{P}$ - Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ mit $\mathbf{E_P}[\Lambda_T] = 1$ und sei $\mathbf{Q} = \Lambda_T \cdot \mathbf{P}$ (dann ist also $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mit Dichte Λ_T und es gilt $\mathbf{E_Q}[X] = \mathbf{E_P}[\Lambda_T X]$ für jede $\mathbf{Q}$-integrierbare Zufallsvariable X). Zeigen Sie:

i) Sei $0 \le t \le T$. Ist X eine $\mathbf{Q}$-integrierbare Zufallsvariable, dann gilt $\mathbf{Q}$-f.s.

$$\mathbf{E_Q}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E_P}\left[\frac{\Lambda_T}{\Lambda_t} X \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

ii) Sei $0 \le s \le t \le T$. Ist X zusätzlich noch $\mathcal{F}_t$ messbar, so gilt

$$\mathbf{E_Q}[X|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E_P}\left[\frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} X \middle| \mathcal{F}_s\right].$$

Hinweis: Zeigen Sie in a), dass $\mathbf{E_Q}\left[\frac{\mathbf{E_P}[\Lambda X|\mathcal{G}]}{\mathbf{E_P}[\Lambda|\mathcal{G}]} \mathbb{1}_A\right] = \mathbf{E_Q}[X \mathbb{1}_A]$ für jedes $A \in \mathcal{G}$.

Aufgabe 36 (4+2 Punkte)

Es sei $N := (N_t)_{0\le t\le T}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 1 unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Für $\lambda > 0$ sei $\mathbf{Q}$ definiert durch

$$\mathbf{Q} := Z_T \cdot \mathbf{P}, \quad \text{wobei} \quad Z_t := e^{(1-\lambda)t + N_t \log \lambda}.$$

Zeigen Sie, dass N unter $\mathbf{Q}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ ist.

Hinweis: Für die Lösung kann Aufgabe 35 benutzt werden. Betrachten Sie die momentenerzeugenden Funktionen $u \mapsto \exp(u(N_t - N_s)$ der Zuwächse von N. Ein Poisson-Prozess X mit Intensität λ ist charakterisiert durch unabhängige Zuwächse und $X_t - X_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ für $0 \le s < t$.