Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 4

Abgabetermin: 19.05.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 13 (4 Punkte)

a) Sei W eine Brownsche Bewegung. Bestimmen Sie $[W]_t$.

b) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-fallende, stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein stetiges Martingal X gibt, sodass $[X]_t = f(t)$ gilt.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger beschränkter stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und X_0 konstant. Zeigen Sie, dass $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $Y_t := X_t - \mathbb{E}[X_t]$, ein stetiges Martingal bezüglich der von (X_t) erzeugten Filtration ist. Bestimmen Sie $[Y]_t$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X^n = (X^n_t)_{t\geq 0}$ eine Folge von stetigen lokalen Martingalen auf einem gemeinsamen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum mit $X^n_0 = 0$. Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten.
Zeigen Sie, dass $\sup_{t\leq\tau_n} |X^n_t| \xrightarrow{P} 0$ genau dann, wenn $[X^n]_{\tau_n} \xrightarrow{P} 0$.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei W eine Brownsche Bewegung und sei τ eine Stoppzeit.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[W_\tau] = 0$, falls $\mathbb{E}[\tau^{1/2}] < \infty$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[W_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau]$, falls $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die BDG-Ungleichung.