Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 1

Abgabetermin: 28.04.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|c_n| \leq k_n$ für alle n und für eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Martingaltransformation von (X_n) bzgl. (c_n) ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ ist.

b) Sei $(\xi_n)_n$ iid Folge mit $\xi_n \in \{-1, 1\}$ und $\mathbb{E}\xi_n = 0$ f.a. n. Sei $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $c_1 := 1$, und für $n \geq 2$ sei

$$c_n := \begin{cases} 2c_{n-1}\,, & \text{falls } \xi_{n-1} = -1\,, \\ 1\,, & \text{falls } \xi_{n-1} = 1\,. \end{cases}$$

Weiter sei $Y_n := \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1})$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \xi_n = 1\}$.

Berechnen Sie $\mathbb{E}Y_n$, $\mathbb{E}Y_{\tau-1}$ und $\mathbb{E}Y_\tau$.

Warum widerspricht Ihr Ergebnis nicht dem Optional-Sampling-Theorem im Martingal-Fall?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ seien weiterhin $U_0, \ldots, U_n$ reellwertige, beschränkte Zufallsvariablen, wobei U_i messbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_i}$ sei für alle $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass das für

$$\mathcal{H} = (H_t)_{t\geq 0} \quad \text{mit} \quad H_t := \sum_{k=1}^n U_{k-1}\mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}(t) \quad \text{durch} \quad (\mathcal{H}\cdot\mathcal{M})_t = \sum_{k=1}^n U_{k-1}(M_{t_k\wedge t} - M_{t_{k-1}\wedge t})$$

definierte stochastische Integral ebenfalls ein Martingal bildet, das fast sicher konvergiert. Zeigen Sie außerdem, dass es stetige Pfade hat, sofern $\mathcal{M}$ stetige Pfade besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $\mathcal{B} = \left(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(k)}\right)_t$, eine k-dimensionale Brown'sche Bewegung mit unabhängigen Komponenten und Start in $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $\|x\|_2 < r$ für $r > 0$ sei

$$\tau_r := \inf\{t > 0 : \|B_t\|_2 = r\}$$

die Treffzeit einer Sphäre von Radius r um den Ursprung. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\tau_r]$.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass $(\|B_t\|_2^2 - kt)$ ein Martingal ist. Außerdem gelten das Optional Stopping Theorem und das Optional Sampling Theorem auch im zeitstetigen Fall.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Diskrete Version der Ito-Formel:

Es seien $X := (X_n)_{0 \leq n \leq N}$ und $Y := (Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_0 = Y_0 = 0$ und $[X,Y] = ([X,Y]_n)_{0 \leq n \leq N}$, wobei

$$[X,Y]_n := \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k, \quad \text{mit } \Delta X_k := X_k - X_{k-1} \text{ und } \Delta Y_k := Y_k - Y_{k-1}.$$

Ferner sei F eine (*absolut stetige*) Funktion mit $F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)\,dy$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion ist mit $\int_{|y| \leq c} |f(y)|\,dy < \infty$ für alle $c > 0$.

Eine Version des diskreten stochastischen Integrals von $f(X) := (f(X_n))_{0 \leq n \leq N}$ bezüglich X ist definiert durch

$$I_n := (f(X) \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_{k-1}) \Delta X_k, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Zeigen Sie

$$F(X_n) = F(X_0) + I_n + \tfrac{1}{2}[X, f(X)]_n + R_n(X, f(X)),$$

wobei

$$R_n(X, f(X)) = \sum_{k=1}^{n} \int_{X_{k-1}}^{X_k} \Big(f(x) - \tfrac{1}{2}(f(X_k) + f(X_{k-1})) \Big) dx.$$