Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 03.07.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen, dann heißt die Verteilung von $Y_n := X_1^2 + \ldots, +X_n^2$, χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden oder kurz χ_n^2-Verteilung. Die zugehörige Dichte ist

$$d_{\chi_n^2}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion bezeichnet (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 2).

a) Aus der Definition der χ^2-Verteilung folgt unmittelbar, dass für unabhängige $Y_m \sim \chi_m^2$ und $Y_n \sim \chi_n^2$ gilt: $Y_m + Y_n \sim \chi_{m+n}^2$. Verifizieren Sie dies durch Anwenden der Faltungsformel auf die Dichten der χ_m^2- und der χ_n^2-Verteilung.

   Hinweis: Die Beta-Funktion ist definiert als $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$, $a, b > 0$, und besitzt die Eigenschaft $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

b) Sei $Y_n \sim \chi_n^2$. Berechnen Sie die Dichte $d_n(x)$ von $Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}}$ und bestimmen Sie deren (punktweisen) Grenzwert für $n \to \infty$. Interpretieren Sie das erhaltene Ergebnis.

   Hinweis: Verwenden Sie die Stirling-Formel für die Gamma-Funktion

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige zum Parameter $\lambda > 0$ poissonverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass durch

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

   ein erwartungstreuer Schätzer für $g(\lambda) = e^\lambda$ definiert wird.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen und $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass

$$T(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1}$$

   ein erwartungstreuer Schätzer für λ ist.

   Hinweis: Sie können verwenden, dass für $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Händler bekommt eine Lieferung von N Glühbirnen, unter denen sich eine unbekannte Anzahl M von defekten Exemplaren befindet. Um den Anteil $\frac{M}{N}$ dieser fehlerhaften Stücke zu bestimmen, nimmt der Händler zufällig ('ohne Zurücklegen') n Glühbirnen aus der Lieferung heraus und stellt die Anzahl k der sich darunter befindenden defekten Birnen fest.
Zeigen Sie, dass durch

$$d^*(k) := \frac{k}{n}$$

ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für $\frac{M}{N}$ gegeben ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Kovarianzmethode von Rao und zeigen Sie zunächst, dass für jeden Schätzer $d(k)$ mit Erwartungswert gleich Null, gilt: $d(k) = 0$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt gemäß der Gleichverteilung auf $[\theta, \theta+1]$. Dabei sei $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt. Weiter seien $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1/2$ und $T_2 = \min(X_1, \dots, X_n)$. Berechnen Sie jeweils Erwartungswert, Varianz und den mittleren quadrierten Fehler $E((T_i - \theta)^2)$ $(i = 1, 2)$.