Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 3.5.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien F und G Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$.
Untersuchen Sie, ob durch folgende Verknüpfungen von F und G auch Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ gegeben sind, oder finden Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel:

$$F \cdot G \qquad \max\{F, G\} \qquad \min\{F, G\} \qquad F^n \qquad x \mapsto F(x+a)$$

$$x \mapsto F(bx) \qquad |2F - G| \qquad \frac{F}{2-G} \qquad \exp\left(\frac{F-1}{F}\right)$$

Hinweis: Charakteristische Eigenschaften von Verteilungsfunktionen wurden in einem Satz der Vorlesung angegeben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sie lassen sich auf das folgende Glücksspiel ein: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Bei Kopf gewinnen Sie zwei Drittel Ihres Einsatzes dazu, bei Zahl verlieren Sie die Hälfte Ihres Einsatzes. Sie starten mit € 1 Kapital und setzen in jeder Runde Ihr gesamtes Kapital ein. Sei K_n Ihr Kapital nach n Runden. Zeigen Sie:

a) $\lim_{n\to\infty} E[K_n] = +\infty$

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(K_n > \varepsilon) = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Affe sitzt vor einer Schreibmaschine und schägt willkürlich (zufällig) auf die Tasten, d.h. alle Zeichen erscheinen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass er unendlich lange "arbeitet", die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er dabei unendlich oft

Stochastik ist schön

schreibt.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Folge von unabhängigen Ereignissen und verwenden Sie das Borel-Cantelli-Lemma.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Irrpfad $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = -1) = 1 - p$ (mit $0 < p < 1$), wobei die $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $p \neq 1/2$, dann ist $P(S_n = 0 \text{ unendlich oft}) = 0$.

b) Falls $p = 1/2$, dann ist $P(S_n = 0 \text{ unendlich oft}) = 1$.

Hinweise: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass der Irrpfad irgendwann einmal zur Null zurückkehrt, mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Wahrscheinlichkeiten (Problem „erste Rückkehr zum Ursprung") sowie der Newton-Formel $(1+x)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} x^n$ für $|x| < 1$, wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \qquad \text{und} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1,$$

und nutzen Sie dann die Unabhängigkeit der Zuwächse aus, um die Wahrscheinlichkeit für eine n-malige Rückkehr zur Null zu erhalten!

Teil a) lässt sich alternativ auch mit Hilfe des Borel-Cantelli-Lemmas und der Stirling-Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ lösen.