Übungen zur Vorlesung "Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 12.05.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 5y + 2z &= 7 \\ 6x + 8y + 8z &= -16 \\ 3x + 7y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie unter Verwendung der Kofaktor-Matrix die zu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein *Kreis* K ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die von einem gegebenen Punkt $m \in \mathbb{R}^2$ (Mittelpunkt) einen konstanten Abstand r (Radius) haben, d.h. $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - m\| = r\}$, wobei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Eine *Ellipse* E dagegen ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, deren Abstandssumme zu zwei gegebenen Punkten $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ (den Brennpunkten) konstant ist, d.h. $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - \bar{x}\| + \|x - \bar{y}\| = c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}_+$.

Sei K_e der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $m = \binom{0}{0}$ und Radius $r = 1$. Zeigen Sie, dass das Bild von K_e unter der affinen Abbildung $x \mapsto v + Ax$ mit $v \in \mathbb{R}^2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) & -b\sin(\varphi) \\ a\sin(\varphi) & b\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a > b > 0,\ \text{und } 0 \le \varphi < 2\pi$$

eine Ellipse mit den Brennpunkten $\bar{x} = \begin{pmatrix} v_1 - \sqrt{a^2-b^2}\cos(\varphi) \\ v_2 - \sqrt{a^2-b^2}\sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} v_1 + \sqrt{a^2-b^2}\cos(\varphi) \\ v_2 + \sqrt{a^2-b^2}\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt mit Hilfe des Transformationssatzes.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Verifizieren Sie die im Skript auf S. 107 angegebenen Gleichungen

$$\langle u_k, u_\ell \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx = \delta_{k\ell},$$
$$\langle v_k, v_\ell \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx = \delta_{k\ell}.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-mathe-II-ing-ws-2017`