Übungen zur Vorlesung
"Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 07.07.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit $\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Zeigen Sie: Ist $\gamma \in C^2([a,b] \times [0,1])$ eine Schar geschlossener Kurven, d.h. $\gamma(a,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$, so gilt

$$\int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{ds}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $c(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)^\top$ und Σ das Flächenstück mit der Parametrisierung

$$f(s,t) = 2c(s) + t\left(\cos\left(\tfrac{s}{2}\right)c(s) + \sin\left(\tfrac{s}{2}\right)e_3\right), \qquad (s,t) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1],$$

und $e_3 = (0,0,1)^\top$.

a) Zeichnen Sie das Flächenstück im $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine Normale $\vec{N}$ und die zugehörige Tangente $\vec{T}$ am Rand.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot \vec{T}\, ds \quad \text{für } F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Tangentialraum der Fläche mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 4$$

im Punkt $(2, \sqrt{3}, 1)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$f(x) = \langle Ax, x\rangle$ und $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$. Bestimmen Sie alle Extrema von f auf M.