19. Juli 2017

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

3. Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = -x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2 + x^2y^2 - 7x^2y^5 + 6.$$
Entscheiden Sie, ob an der Stelle $P = (0, 0)$ ein lokales Extremum vorliegt, und wenn ja, welches.

4. Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + xy - y^2 + x^2y + 3x^2y^4.$$
Entscheiden Sie, ob an der Stelle $P = (0, 0)$ ein lokales Extremum vorliegt, und wenn ja, welches.

5. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = x_1^2 + (2 - x_1)^3 x_2^2.$$
a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.
b) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.
(c) Untersuchen Sie, ob die lokalen Minima/Maxima auch globale Minima/Maxima sind.

6. Es seien F und G zweimal stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $u(x, y) = F(x + y) - G(x - y)$ definiert. Zeigen Sie
$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{\partial u^2}{\partial y^2}.$$

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2, ebenso Δf.

8. Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Zeigen Sie $\Delta f = 0$.

9. a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$g(x,y) = x^3 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)y^2 - xy.$$

b) Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)y^2 = xy.$$

Überprüfen Sie, ob sich die Gleichung in einer Umgebung des Punktes $(1,1)$ nach $y = u(x)$ auflösen lässt und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung $u'(1)$.
c) Berechnen Sie den Wert $u(\frac{11}{10})$ näherungsweise mit Hilfe einer Taylor-Approximation.

10. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,-2,2)$ der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung

$$z = 3x^2y + 2xy^2$$

gegeben ist.

11. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkte P:

$$f(x,y,z) = \sin(xy) + \cos(z), \qquad P = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}, 0.2).$$

12. a) Für $a < b$ und eine parametrisierte Kurve $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist ihre Bogenlänge gegeben durch $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für die parametrisierte Gerade

$$\gamma(t) = t\frac{q-p}{b-a} + \frac{bp-aq}{b-a},$$

welche die Punkte p, q verbindet, der Wert $L(\gamma)$ die Länge der Gerade angibt.
b) Es sei die parametrisierte Kurve $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

gegeben. Berechnen Sie $L(\gamma)$.
Hinweis: Verwenden Sie $(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t) * 4\sin^2(t/2)$.

13. Berechnen Sie das Integral $\int_\varphi f ds$ für die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

entlang des Stücks der archimedischen Spirale $\varphi : [\pi, 3\pi] \ni t \to (t\cdot\cos(t), t\cdot\sin(t)) \in \mathbb{R}^2$.

14. Bestimmen Sie, falls das Vektorfeld konservativ ist, ein Potential von

$$A : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to \begin{pmatrix} 9x^2y^2 \\ 6x^3y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

15. Prüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$A(x, y) = \Big(e^{xy} + xye^{xy}, x^2e^{xy}\Big).$$

ein Potential besitzt und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

16. Prüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$A(x, y, z) = \Big(2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, x^3e^{xy} + y^2z, \frac{1}{3}y^3 + 2z\Big).$$

ein Potential besitzt und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

17. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

auf der Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$$

ein absolutes (globales) Maximum hat. Bestimmen Sie den maximalen Wert von f auf A.

18. Gegeben seien drei nicht-negative Zahlen x, y, z, deren Produkt 6 ergibt. Für welche Zahlen ist die Summe $x + y + z$ maximal? Berechnen Sie auch den zugehörigen Wert der Summe.

19. Gegeben seien drei nicht-negative Zahlen x, y, z, deren Summe 20 ergibt. Für welche Zahlen ist das Produkt x^2yz maximal? Berechnen Sie auch den zugehörigen Wert des Produkts.

20. Es seien $x = (1, 1, 1)$, $y = (1, 2, 3)$ und $z = (3, 1, 2)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren xy und xz aufgespannten Parallelogramms.

21. Sei $R > 0$ und F das Flächenstück $F = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = R^2, z \geq 0, -1 \leq y \leq 1\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_F z^2 do.$$

22. Ein Massepunkt bewegt sich in einem Kraftfeld A entlang einer Kurve α. Das Kraftfeld ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Die Kurve α beschreibt die Strecke zwischen den Punkten $(0, 1, 0)$ und $(2, 2, 4)$.
a) Finden Sie eine geegneten Parametrisierung der Kurve α.
b) Berechnen Sie die Arbeit

$$W := \int_\alpha A ds,$$

welche von dem Massepunkt dabei verrichtet wird.