Discrete Time Finance **SS 2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

Übung 2

Abgabe: 09.05.2017 zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei Anlageklassen, einer Risikobehafteten Aktie und einem risikolosen Bankkonto. Bezeichne $V_C(K)$ den heutigen Preis einer Call-Option auf die Aktie mit Strike K and fixer Maturität T.

(a) Zeigen Sie: Wenn $K_2 \geq K_1$ gilt, dann $V_C(K_1) \geq V_C(K_2)$. Andernfalls gibt es eine Arbitrage-Möglichkeit.
Hinweis: Konstruieren Sie ein Portfolio bestehend aus den zwei Call-Optionen.

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda \in (0,1)$ und $K_2 \geq K_1$ gilt $\lambda V_C(K_1) + (1-\lambda)V_C(K_2) \geq V_C(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2)$. Andernfalls gibt es eine Arbitrage Möglichkeit.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** Sei $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. und $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\sim \mathrm{Bin}(1,p)$ unabhängig von N. Definiere

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

Berechnen Sie

(a) $\mathbb{E}[X|N=n]$ und $\mathbb{E}[X]$,

(b) $\mathbb{E}[N|X=k]$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Für einen adaptierten Prozess $X = (X_t)_{t=0,\ldots,T}$ mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$, zeigen Sie die Äquivalenz

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \;\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t \;\forall\, t = 0,\ldots,T-1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei ein einperiodiges Marktmodell mit einer einzigen risikobehafteten Anlage S gegeben, die auf einem endlichen W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert ist. Dabei soll $\mathbb{P}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gelten. Der Preis der Anlage sei π und der risikolose Zinssatz sei $r > -1$. Wir definieren

$$a \;:=\; \max_{\omega\in\Omega} S(\omega) \qquad \text{und} \qquad b \;:=\; \min_{\omega\in\Omega} S(\omega).$$

Zeigen Sie, dass das Modell genau dann arbitragefrei ist, wenn $b < \pi(1+r) < a$ gilt.