Discrete Time Finance

SS 2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

Übung 1

Abgabe: 02.05.2017 zu Beginn der Übung.

Für eine kleine Zusammenfassung zur bedingten Erwartung und Martingalen haben wir Ihnen auf der Vorlesungshomepage ein Handout bereitgestellt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte (i.i.d.) und gleichförmig beschränkte Zufallsvariablen mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Definiere

$$M_n(\lambda) = \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)\right])^n}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie das der Prozess $(M_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Gegeben sei ein Bond B mit Laufzeit 2 Jahren und Nennwert 100 EUR mit jährlichem Kupon von 5 %, halbjährlich ausgezahlt. Dies bedeutet es gibt die Cashflows (2.5 EUR, 2.5 EUR, 2.5 EUR, 102.5 EUR) zu den Zeitpunkten (t = 0.5, t = 1, t = 1.5, t = 2). Ziel ist es den heutigen (t=0) Barwert von B zu berechnen. Dazu würde man die einzelnen Cashflows mit Nullkupon Anleihen (mit entsprechender Laufzeit) diskontieren. Leider sind Preise von solchen Bonds in dem von uns betrachteten Markt nicht bekannt. Bekannt sind die Preise der folgenden Bonds mit Nominal 100 EUR und halbjährlich ausgezahltem Kupon:

bond	Laufzeit (in Jahren)	coupon p.a.	Barwert
B_1	0.5	0	98
B_2	1	0	95
B_3	1.5	6.2 %	101
B_4	2	8.0 %	104

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Preise den Barwert von B.

Aufgabe 3. Wir betrachten Zwei Aktien mit aktuellen Preisen $S_{1,t}$ und $S_{2,t}$. Die Preise nach einem Monat bezeichnen wir mit $S_{1,t+1}$ und $S_{2,t+1}$. Nach einem Monat wird nun für jede der beiden Aktien festgestellt, ob

$$S_{i,t+1} > 1.03 \cdot S_{i,t}\,, \quad S_{i,t+1} < 0.97 \cdot S_{i,t} \quad \text{oder} \quad S_{i,t+1} \in [0.97 \cdot S_{i,t}\,, 1.03 \cdot S_{i,t}],\ i \in \{1, 2\}.$$

1. Finden Sie einen geeigneten Grundraum Ω, der diese Zufallssituation beschreibt. Ist Ω eindeutig bestimmt? (1 Punkt)
2. Stellen Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Elementarereignisse dar (2 Punkte):

   A: Für beide Aktien gilt $S_{i,t+1} > 1.03 \cdot S_{i,t}$.

   B: Für beide Aktien gilt $S_{i,t+1} \in [0.97 \cdot S_{i,t}\,, 1.03 \cdot S_{i,t}]$.

C: Für höchstens ein $i \in \{1, 2\}$ gilt $S_{i,t+1} < 0.97 \cdot S_{i,t}$.

D: Für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$ gilt $S_{i,t+1} < 0.97 \cdot S_{i,t}$.

Aufgabe 4. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d., mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Definiere $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Zeigen Sie das $\sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. (1 Punkt)
2. Wir betrachten nun den Prozess
$$M_n = S_n - n\mathbb{E}[X_1].$$
Zeigen Sie das $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist. (3 Punkte)
3. Als nächstes betrachten wir den Prozess
$$\tilde{M}_n = S_n - \lambda(n),$$
wobei $\lambda(n)$ eine deterministische, nur von n abhängende Funktion ist. Bestimmen Sie alle Funktionen $\lambda(n)$, für die $(\tilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist. Wenn $\lambda(n) \equiv \lambda$ eine konstante Funktion ist die nicht mehr von n abhängt, was muss dann für X_1 gelten damit $(\tilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal wird? (2 Punkte)