Übungen zur Vorlesung
“Stochastik“

Sommersemester 2016, Blatt 7

Lösungsskizze

Aufgabe 34

(a) Die Aussage ist äquivalent zu $\sum \mathrm{P}(A) = \infty \Rightarrow \mathrm{P}(A_n \text{ u.o.}) = 1$, dem zweiten Teil von Borel-Cantelli, für den dort aber Unabhängigkeit gefordert wird. Gegenbeispiel: $A_n = A$ mit $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$.

(b) Die Aussage ist äuivalent zu $\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Für A mit $0 < \mathrm{P}(A) < 1$ und $B := A^c$ ist aber $\mathrm{P}(A \cap B) = 0 < \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

(c) Mit uns bekannten Rechenregeln und der 3. binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathrm{E}[(X+Y)(X-Y)] - \mathrm{E}[X+Y]\,\mathrm{E}[X-Y] \\ &= \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[Y]^2 = \mathrm{Var}[X] - \mathrm{Var}[Y].\end{aligned}$$

Daher stimmt die Aussage.

(d) Möglichkeit 1: X_n ist in Verteilung identisch zu $1 + \sum_{k=1}^n Y_k$, wobei $(Y_k)_{k=1\ldots n}$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt sind, womit die Aussage aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt.

Möglichkeit 2: Die Chebychev-Ungleichung liefert

$$\mathrm{P}(|\tfrac{1}{n}X_n| > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(\tfrac{1}{n}|X_n - 1| + |\tfrac{1}{n}| > \varepsilon) \leq \underbrace{\mathrm{P}(|X_n - 1| > n\varepsilon)}_{\leq \frac{4n\sigma^2}{\varepsilon n^2} \to 0} + \underbrace{\mathrm{P}(\tfrac{1}{n} > \varepsilon)}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aufgabe 35

(a) Laplace-W-Raum $\Omega = \{1,2,3\}^2, \mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(A) = |A|/9$ für $A \in \mathcal{A}$. Für $\omega \in \Omega$ schreibe $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ mit $\omega_i \in \{1,2,3\}$. Dann definiere

$$X(\omega) = \omega_1, \qquad Y(\omega) = \omega_2 \qquad (\omega \in \Omega).$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \omega_1 + \omega_2 = 3\}) = \mathrm{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/9, \\ \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(\{1,3\} \times \{1,2,3\}) = 2/3, \\ \mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(\{(1,2)\}) = 1/9 \neq 4/27 = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).\end{aligned}$$

und somit liegt keine Unabhängigkeit vor.

(c) Bei 10 unabhängigen Versuche erhält man den Wert einer Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \mathrm{P}(A) = 2/9$ bei $k = 6$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\binom{10}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^6\left(\frac{7}{9}\right)^4.$$

(d) Berechne

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} kP(X=k) = 1/3+2/3+3/3 = 2,\\
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2P(X=k) = 1/3+4/3+9/3 = 14/3,\\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2 = 2/3,\\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= 0 \qquad \text{wegen Unabhängigkeit},\\
\mathrm{Cov}(X,X+Y) &= \mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Var}(X)+0 = 2/3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 36

Vorbemerkung: Wir benötigen die Verteilung von X und von Y. Nach der Angabe ist $\mathrm{P}(Y=-1)=\mathrm{P}(Y=1)=0.5$ sowie $\mathrm{P}(X=0)=0.2$, $\mathrm{P}(X=1)=0.6$ und $\mathrm{P}(X=2)=0.2$.

(a) X und Y sind nicht unabhängig, da

$$\mathrm{P}(X=2,Y=-1)=0\neq 0.2\cdot 0.5=\mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}(Y=-1).$$

(b) Es fehlt die Verteilung von $Z:=X+Y\in\{-1,\dots,3\}$:

$$\mathrm{P}(Z=-1)=0.2,\quad \mathrm{P}(Z=0)=0.3,\quad \mathrm{P}(Z=1)=0,\quad \mathrm{P}(Z=2)=0.3,\quad \mathrm{P}(Z=3)=0.2.$$

(c) $\mathrm{E}[X]=0+1\cdot 0.6+2\cdot 0.2=1.$

(d) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]=\mathrm{E}[XY]=-0.3+0.3+2\cdot 0.2=0.4.$

Aufgabe 37

Die Log-Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\log L(x_1,\dots,x_n;\theta) &= \log\left(\theta^{n-\sum_k |x_k|}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\sum_k |x_k|}\right)\\
&= \Big(n-\sum_k |x_k|\Big)\log\theta+\sum_k |x_k|\log(1-\theta)-\sum_k |x_k|\log 2.
\end{aligned}$$

Da durch Ableiten nach θ der letzte Summand verschwindet, ist die Ableitung hier identisch mit der der Log-Likelihood-Funktion einer Binomialverteilung mit Parametern n und $1-\theta$, die durch den Mittelwert maximiert wird. Also ist $\hat\theta(X):=1-\frac{1}{n}\sum_k |X_k|$ der gesuchte ML-Schätzer.
Da die $|X_k|$ unabhängig und Bernoulli-$(1-\theta)$-verteilt sind, folgt die Konsistenz direkt aus dem Gesetz großer Zahlen.

Aufgabe 38

$$P(Z_n \leq x) = 1 - P(X_k > x/n, \text{ für alle k}) = 1 - (1 - \tfrac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 - e^{-x} = P(Z \leq x).$$

Aufgabe 39

Wir gehen also von einer Binomialverteilung mit Parametern 100 und 365^{-1} aus. Da die Erfolgswahrscheinlichkeit sehr klein ist, ist die Poisson-Approximation verwendbar. Also kann annähernd mit einer Poi($\frac{100}{365}$)-Verteilung rechnen. Wir erhalten:

$$\text{exakt: } 1 - (\tfrac{364}{365})^{100} \qquad \text{und} \qquad \text{approximiert: } 1 - e^{-\frac{100}{365}}.$$