Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Sommersemester 2016, Blatt 7

Aufgabe 34

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an. Aus der Vorlesung oder der Übung bekannte Sätze dürfen zitiert werden.

(a) Für eine Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ gilt

$$\mathrm{P}(A_n \text{u.o.}) < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty.$$

(b) Für Ereignisse A und B mit $\mathrm{P}(B) > 0$ gilt $\mathrm{P}(A|B) \geq \mathrm{P}(A)$.

(c) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten, so sind Die Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ genau dann unkorreliert, wenn $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ gilt.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \sim \mathcal{N}_{1,n}$, also normal verteilt mit Parametern $\mu = 1$ und $\sigma^2 = n$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 35

Es wird zweimal unabhängig ein fairer sechsseitiger Würfel geworfen, der auf je zwei Seiten die Zahlen $1, 2$ bzw. 3 trägt.

(a) Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf. Definieren Sie auf diesem Raum die Zufallsvariablen X, Y, die das erste bzw. das zweite Würfelergebnis beschreiben sollen.

(b) Es sei A das Ereignis „Die Summe beider Würfelergebnisse ist 3" und B das Ereignis „Der erste Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl". Sind die beiden Ereignisse unabhängig?

(c) Das Experiment werde nun zehnmal wiederholt. Jedes Mal wird die Summe beider Würfelergebnisse notiert. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Würfelergebnisse genau 6 Mal die Zahl 3 ergibt?

(d) Berechnen Sie

$$\mathrm{E}[X]\,,\ \mathrm{Var}[Y]\,,\ \mathrm{Cov}(X,Y) \text{ und } \mathrm{Cov}(X, X+Y)\,.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 36

Die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) sei gegeben durch die folgende Tabelle:

	$Y = -1$	$Y = 1$
$X = 0$	0.2	0
$X = 1$	0.3	0.3
$X = 2$	0	0.2

(a) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von Y und von $X + Y$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(d) Berechnen Sie $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 37

Es sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und Verteilung P_θ, $\theta \in (0, 1)$ gegeben durch

$$P_\theta(X_i = 0) = \theta, \quad \text{und} \quad P_\theta(X_i = -1) = P_\theta(X_i = 1) = \frac{1-\theta}{2}.$$

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ für θ. Ist der Schätzer konsistent?

Aufgabe 38

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ (uniform verteilt auf $[0, 1]$) und sei

$$Z_n := n \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Zeigen Sie, dass Z_n in Verteilung gegen eine exponential verteilte Zufallsvariable Z konvergiert.

Aufgabe 39

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Personen mindestens eine Person am 19. Juli Geburtstag hat? Geben Sie die exakte Wahrscheinlichkeit und die Poisson-Approximation der Wahrscheinlichkeit an. Begründen Sie warum hier die Poisson-Approximation anwendbar ist.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat und dass Geburtstage im Jahr gleichverteilt sind.