Übungen zur Vorlesung
“Stochastik“

Sommersemester 2016, Blatt 6

Lösungsskizze

(Die Lösungen sind bewusst kurz gehalten, also nicht beispielhaft für die Bearbeitung von Klausuraufgaben.)

Aufgabe 21

Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\varrho_n(\lambda; X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(X_i),$$

wobei $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Der Maximum Likelihood (ML) Schätzer maximiert diese Funktion bezüglich λ. Um ihn zu bestimmen, können wir äquivalent den Logarithmus der Likelihood-Funktion maximieren. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \varrho_n(\lambda; X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 \lambda} \log \varrho_n(\ldots) = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

Somit folgt schnell, dass die Likelihood von $\hat{\lambda} := n / \sum_{i=1}^{n} X_i$ maximiert wird. Die Konsistenz folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen und der Stetigkeit von $x \mapsto 1/x$ in $1/\lambda$.

Aufgabe 22

Es sei z das obere $\mathcal{N}(0,1)$-$\alpha/2$-Quantil, also $1 - \Phi(z) = \alpha/2$. Es gilt $\bar{X}_n = \frac{108}{500} = 0.6^3 = 0.216$ und $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{499}\big(108(1 - 0.216)^2 + 392(-0.216)^2\big) \approx 0.1697$. Hier gibt es mehrere Wege vorzugehen. Aufsteigend nach Genauigkeit:

i) Man errechnet zunächst:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\overset{!}{\leq} \mathrm{P}_p \left(p \in (\hat{X}_n - \delta_1, \hat{X}_n + \delta_1)\right) = \mathrm{P}_p \left(\frac{|\hat{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{\delta_1 \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right) \\ &\approx 2\Phi\Big(\frac{\delta - 1\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \Big) - 1, \end{aligned}$$

also $\delta_1 \geq z\sqrt{p(1-p)/n}$. Nun hängt unsere Wahl von δ_1 noch von p ab, das wir eigentlich nicht kennen. Da aber $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, können wir $\delta_1 = z/(2\sqrt{n})$ wählen und erhalten $(0.216 - 0.0224z, 0.216 + 0.0224z)$.
Die sehr grobe Abschätzung von $p(1-p)$ macht das Konfidenzintervall hier relativ ungenau.

ii) Man kann hier (wie im Skript) Übung 7.2 verwenden mit $Z \approx \mathcal{N}(0,1) \approx \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n}} \approx \frac{0.216-p}{\sqrt{0.1697/500}}$, um dann ein Konfidenzintervall anzugeben:

$$\frac{0.216-p}{\sqrt{0.1697/500}} \in (-z,z) \quad \Leftrightarrow \quad p \in (0.216-\delta_2, 0.216+\delta_2),$$

wobei $\delta_2 = 0.0184z = \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}z$, was schon besser ist als die Lösung von i).
Hier haben wir im Prinzip mit einer Normalverteilung mit geschätzten Parametern gerechnet ($p \approx \mathcal{N}(\bar{X}_n, \hat{\sigma}_n^2/n)$). Dies erzeugt ebenfalls Ungenauigkeiten. Vergleicht man δ_2 und δ_1, sieht man, dass hier die Abschätzung $p(1-p) \leq 1/4$ ersetzt wurde durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\sigma}_n^2$ für $p(1-p) = \mathrm{Var}(X)$.

iii) Analog zu i) erhält man

$$1-\alpha \approx \mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z\right) = \mathrm{P}\left(\frac{n(\bar{X}_n-p)^2}{p(1-p)} \leq z^2\right)$$

und somit eine quadratische Ungleichung

$$\bar{X}_n^2 - 2p\bar{X}_n + p^2 \leq z^2 p(1-p)/n$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p \cdot \frac{n\bar{X}_n + z^2/2}{n+z^2} + \frac{n\bar{X}_n^2}{n+z^2} \leq 0,$$

die das Intervall zwischen den Nullstellen einer nach oben geöffneten Parabel in p beschreibt, dessen Grenzen (also die Nullstellen der Parabel) sich ergeben als

$$\frac{n\bar{X}_n + z^2/2}{n+z^2} \pm \frac{z}{n+z^2}\sqrt{\frac{z^2}{4} + n\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}$$

$$\approx \frac{108 + z^2/2}{500+z^2} \pm \frac{z}{500+z^2}\sqrt{\frac{z^2}{4} + 84.672}.$$

Das hier entstandene Konfidenzintervall ist, wie man am ersten Summanden erkennen kann, nicht mehr symmetrisch um $\bar{X}_n$; nur annähernd für große n. Hier haben wir tatsächlich nur den zentralen Grenzwertsatz und keine weiteren (Ab-)Schätzungen verwendet. Damit sollte zumindest anschaulich klar sein, dass es sich hierbei um das präziseste der drei Konfidenzintervalle handelt.

Aufgabe 23

Für den Fehler 1. Art gilt

$$\mathrm{P}_{\mu_0}(T(X)=1) = \mathrm{P}_{\mu_0}(\mu_0 \notin I(X)) = \alpha.$$

Also handelt es sich bei T um einen Test zum Niveau α.
Für $\mu \neq \mu_0$ ist die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\mu(T(X)=0) &= \mathrm{P}_\mu(\mu_0 \in I(X)) \\ &= \mathrm{P}_\mu\Big(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= \mathrm{P}_\mu\Big(\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{P}_\mu\Big(\mu_0 - \mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \mu_0 - \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \\
&= \mathrm{P}_\mu\Big(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\sim\mathcal{N}_{0,1}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\Big) - \Phi\Big(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\Big),
\end{aligned}
$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Für $\mu \to \mu_0$ (bei festem n) konvergiert die rechte Seite gegen

$$\Phi\big(z_{\alpha/2}\big) - \Phi\big(-z_{\alpha/2}\big) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$

Dass dies der maximale Fehler 2. Art ist, folgt aus

$$\Phi\big(c + z_{\alpha/2}\big) - \Phi\big(c - z_{\alpha/2}\big) \le \Phi\big(z_{\alpha/2}\big) - \Phi\big(-z_{\alpha/2}\big),\ c \in \mathbb{R}.$$

(Die Fläche unter der Dichte der Normalverteilung über dem Intervall der Länge $2z_{\alpha/2}$ ist bei einem um Null symmetrischen Intervall am größten.)

Aufgabe 24

Sei N die Anzahl der richtigen Antworten. Wir gehen davon aus, dass $N \sim \mathcal{B}(n,p)$ bei unbekanntem p. Mit Hilfe eines unteren $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls I für p lässt sich dann die Vermutung, dass der Student geraten hat, verwerfen, wenn $1/a \notin I$. Nach Skript ((7.5) und der Teil danach) ist die untere Grenze $p_{\hat{u}}(x) = (1+b)^{-1}$ mit $b = F_Y^{-1}(1-\alpha)\cdot(n-x+1)/x$, wobei Y eine $F_{2(n-x+1),2x}$-verteilte Zufallsvariable ist, deren Quantile in der Tabelle im Hinweis stehen. Man erhält

$$p_{\hat{u}}(11) = \Big(1 + 2.83\cdot\frac{10}{11}\Big)^{-1} \approx 0.2799 < \frac{1}{3}, \qquad p_{\hat{u}}(15) = \Big(1 + 2.84\cdot\frac{6}{15}\Big)^{-1} \approx 0.4682 > \frac{1}{3},$$

$$p_{\hat{u}}(12) = \Big(1 + 2.79\cdot\frac{9}{12}\Big)^{-1} \approx 0.3234 < \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad p_{\hat{u}}(13) = \Big(1 + 2.78\cdot\frac{8}{13}\Big)^{-1} \approx 0.3689 > \frac{1}{3}.$$

Man braucht also mindestens 13 richtige Fragen, um hier zum Niveau 99% ausschließen zu können, dass der Student geraten hat.

Aufgabe 25

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{weiße Kugel gezogen}) &= \mathrm{P}(\text{Ziehen aus Urne 1})\cdot\mathrm{P}(\text{weiße Kugel gezogen}|\text{Ziehen aus Urne 1}) \\
&\quad + \mathrm{P}(\text{Ziehen aus Urne 2})\cdot\mathrm{P}(\text{weiße Kugel gezogen}|\text{Ziehen aus Urne 2}) \\
&= \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{12} = \frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 26

$$Z \sim \mathrm{Ber}(pq). \qquad \mathrm{P}(Y = y) = \begin{cases} p(1-q) & \text{falls } y = 1 \\ (1-p)q & \text{falls } y = -1 \\ pq + (1-p)(1-q) & \text{falls } y = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 27

$$\mathrm{E}[Xe^{\lambda X}] = \sum_{k\ge1} ke^{\lambda k}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\sum_{k\ge0}\frac{(\lambda e^\lambda)^k}{k!} = \lambda e^{\lambda e^\lambda}.$$

Aufgabe 28

Zwei Zufallsvariablen X, Y sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ für alle x, y.

a) X und Y sind uniform auf $(-2,2)$ verteilt und unabhängig, da

$$f_X(x) = \int f(x,y)dy = \frac{1}{16}\int_{-2}^{2} \mathbb{1}_{(-2,2)^2}(x,y)dy = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{(-2,2)}(x) = f_Y(x).$$

b) f_X und f_Y identisch zu a), allerdings keine Unabhängigkeit; erkennbar daran, dass $X \cdot Y \geq 0$.

c) $f_X(x) = \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = f_Y(x)$. Keine Unabhängigkeit; Auch erkannbar daran, dass die Dichte wie in b) Mengen, auf denen $X \cdot Y > 0$, stärker gewichtet.

Aufgabe 29

Hinweis folgt mit Voraussetzung durch Fallunterscheidung. Wegen der Monotonie des Integrals und bekannten Umformungen ergibt sich

$$0 \leq \int_\Omega \int_\Omega (X(\omega_2) - X(\omega_1))(Y(\omega_2) - Y(\omega_1))d\,\mathrm{P}(\omega_1)d\,\mathrm{P}(\omega_2) = 2\,\mathrm{E}[XY] - 2\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y].$$

Aufgabe 30

Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$ (Anzahl der Jungen unter den Neugeborenen, (X_i) unabhängig), wobei $n = 14000$ und $p = \frac{18}{35}$ ist. Dann gilt $\mathrm{E}[S_n] = 14000 \cdot \frac{18}{35}$, $\mathrm{Var}(S_n) = 14000 \cdot \frac{18 \cdot 17}{35^2}$ und

a)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(7037 \leq S_n \leq 7363) &= \mathrm{P}\left(\frac{7037 - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq \frac{7363 - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{7363 - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{7037 - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) \approx 0.9942.\end{aligned}$$

b) Mit $S_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{17}{35})$ ist für $n \geq 294$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\tfrac{15}{35}n \leq S_n \leq \tfrac{19}{35}n) &= P\Big(\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{17 \cdot 18}} \leq \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{17 \cdot 18}}\Big) \\ &= 2\Phi\Big(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{17 \cdot 18}}\Big) - 1 \geq 0.95.\end{aligned}$$

Aufgabe 31

Nach Markov-Ungleichung und Voraussetzung ist $\sum_{n\geq 0} \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also nach Borel-Cantelli, dass $|X_n - X| < \varepsilon$ fast sicher für fast alle n gilt.

Aufgabe 32

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\mu = 0$. Ansonsten betrachten wir die Zufallsvariable $Z = X - \mu$, für die $\mathrm{E}[Z] = 0$, $\mathrm{E}[Z^3] = \mathrm{E}[(X-\mu)^3]$ und $\mathrm{E}[Z_i - \bar{Z}_n] = \mathrm{E}[X_i - \bar{X}_i]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^3\Big] &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i^3] - 3\,\mathrm{E}\Big[\bar{X}_n\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2\Big] + 3\,\mathrm{E}\Big[\bar{X}_n^2\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\bar{X}_n^3] \\
&= n\,\mathrm{E}[X^3] - 3n^2\,\mathrm{E}[\bar{X}_n^3] + 3n\,\mathrm{E}[\bar{X}_n^3] - n\,\mathrm{E}[\bar{X}_n^3] \\
&= n\,\mathrm{E}[X^3] + \mathrm{E}[\bar{X}_n^3](2n - 3n^2) \\
&= (n + \tfrac{2}{n} - 3)\,\mathrm{E}[X^3],
\end{aligned}$$

da
$$\mathrm{E}[\bar{X}_n^3] = \frac{1}{n^3}\,\mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i^3 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i \vee k\neq i} X_i X_j X_k\Big] = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}[X^3] + 0.$$

Damit ist ein erwartungstreuer Schätzer des 3. zentralen Momentes von X gegeben durch

$$\frac{1}{(n + \frac{2}{n} - 3)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^3.$$

Die Rechnung für den erwartungstreuen Varianzschätzer funktioniert über dieselben Methoden völlig analog.

Aufgabe 33

a) Richtig! S_n ist (in Verteilung) die Summe von n unabhängigen, identisch $\mathrm{Ber}(p)$-verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert p.

b) Falsch! Gegenbespiel mit fairem Würfel:
$A := \{\text{Augenzahl gerade}\}$, $B := \{\text{Augenzahl} = 2\}$.

c) Falsch! Aufgabe 26 liefert ein Gegenbeispiel:
Ist dort $p = q$, so ist $X_1 \cdot X_2 \sim \mathrm{Ber}(p^2)$, aber $X_1^2 = X_1 \sim \mathrm{Ber}(p)$.