

# Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Sommersemester 2016, Blatt 5

**Abgabetermin:** 28.6.2016, vor Beginn der Vorlesung  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.  
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

## Aufgabe 17

(4 Punkte)

Ein Affe tippt auf einer Tastatur, die nur die 26 Buchstaben von  $A$  bis  $Z$  beinhaltet.

- Gehen Sie davon aus, dass der Affe die getippten Buchstaben uniform-verteilt und unabhängig voneinander auswählt. Zeigen Sie, dass, sofern der Affe unendlich oft tippen darf, fast sicher unendlich oft das Wort „STOCHASTIK“ in der von ihm eingegebenen Zeichenfolge vorkommt.
- Konstruieren Sie ein anderes Entscheidungsverfahren als in a), sodass immer noch jeder Buchstabe mit positiver Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle auftreten kann, das Wort „STOCHASTIK“ jedoch nur noch fast sicher endlich oft auftritt.

## Aufgabe 18

(4 Punkte)

Es sei  $Y_\lambda$  eine zum Parameter  $\lambda$  Poisson-verteilte und  $N$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{Y_\lambda}{\lambda} \implies 1 \quad \text{und} \quad \frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \implies N.$$

## Aufgabe 19

(4 Punkte)

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} Kxy^2 & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie  $K$  so, dass  $f$  tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und berechnen Sie

- die Randdichten von  $X$  und  $Y$ ,
- die bedingte Dichte  $f_Y(y | X = x)$ ,
- den bedingten Erwartungswert  $E[Y | X = x]$ .

(bitte wenden)

## Aufgabe 20

(4 Punkte)

In einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perलगewinnung gezüchtet. Allerdings bringt durchschnittlich nur jede fünfzigste Muschel eine Perle hervor.

- a) Wie viele Muscheln müssen mindestens geöffnet werden, um mit Wahrscheinlichkeit 0.95 oder mehr mindestens eine Perle zu erhalten?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 100 Muscheln mindestens zwei Perlen enthalten?

Berechnen Sie die Ergebnisse jeweils exakt, mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes und mit Hilfe der Poissonapproximation der Binomialverteilung.

HINWEIS: Für die Berechnung der Approximationen mit der Normalverteilung wird eine Tabelle der Werte der Standardnormalverteilungsfunktion, die man z.B. im Internet finden kann, oder eine geeignete Software benötigt (beispielsweise **R**).