Übungen zur Vorlesung
“Stochastik“

Sommersemester 2016, Blatt 4

Abgabetermin: 14.6.2016, vor Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ für $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := \min(X_1, \dots, X_n)$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{P}(X_i = Y)$ für $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $\theta, r > 0$ Erwartungswert und Varianz einer $\Gamma(\theta, r)$-verteilten Zufallsvariablen. (vgl. Definition 4.5)

Hinweis: Die Gamma-Funktion ist gegeben durch $\Gamma(r) := \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt$.

Aufgabe 15 (4+2 Punkte)

Zeigen Sie für $\theta, r_1, r_2 > 0$, dass $\Gamma(\theta, r_1) * \Gamma(\theta, r_2) = \Gamma(\theta, r_1 + r_2)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für die Beta-Funktion gilt

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Für einen Beweis dieser Identität erhalten Sie jedoch 2 Bonuspunkte.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

a) Es seien X und Y unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} \frac{X}{Y} & : Y \neq 0 \\ 0 & : Y = 0 \end{cases}$$

Cauchy-verteilt mit Parameter 1 ist.

b) Es sei U eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ uniformverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\tan(U)$ Cauchy-verteilt mit Parameter 1 ist.