Übungen zur Vorlesung
“Stochastik“

Sommersemester 2016

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A

Betrachten Sie das viermalige Werfen eines fairen Würfels. Konstruieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, formalisieren Sie die Ereignisse

A: Das Maximum der erhaltenen Augenzahlen ist höchstens 4.

B: Das Maximum der erhaltenen Augenzahlen ist genau 4.

C: Das Minimum der erhaltenen Augenzahlen ist höchstens 4.

D: Eine strikt absteigende Folge wird geworfen.

und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.

Lösungsskizze:

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1, 2, ..., 6\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$, $|\Omega| = 6^4$ und P die Laplace-Verteilung auf Ω, d.h. $\mathrm{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$.

- $A := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\}\} = \{1, 2, 3, 4\}^4$, $|A| = 4^4$ und $\mathrm{P}(A) = ({}^4/_6)^4 \approx 0.198$.
- $B := \{1, 2, 3, 4\}^4 \setminus \{1, 2, 3\}^4$, $|B| = 4^4 - 3^4$ und $\mathrm{P}(B) = \frac{16}{81} - \frac{1}{16} \approx 0.135$.
- $C := \Omega \setminus \{5, 6\}^4$, $|C| = |\Omega| - 2^4$ und $\mathrm{P}(C) = (6^4 - 2^4)/(6^4) = 1 - \frac{2^4}{6^4} \approx 0.988$.
- $|D| = \binom{6}{4} = 15$ und schließlich $\mathrm{P}(D) = \frac{15}{6^4} \approx 0.0116$.

Aufgabe B

Es sei Ω ein diskreter Grundraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω. Zu den Ereignissen $A, B, C \subset \Omega$ seien die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{20}, \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(B \setminus C) = \frac{1}{5}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\mathrm{P}(B)$ und $\mathrm{P}(A \cap B)$.

Lösungsskizze:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C^c) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8+5-10}{20} = \frac{3}{20}.$$

Aufgabe C

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{für } 0 < x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Um welche Verteilung handelt es sich hier? Bestimmen Sie $\mathrm{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$, $\mathrm{P}(Y \leq X)$ und $\mathrm{P}(X + Y \leq \frac{3}{4})$ für $Y := X^2$.

Lösungsskizze:

- $\mathrm{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
- $\mathrm{P}(Y \leq X) = \mathrm{P}(X^2 \leq X) = \mathrm{P}(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{2}$,
  da $x^2 \leq x \Leftrightarrow x \leq 1$ für $0 \leq x \leq 2$.
- $\mathrm{P}(X + Y \leq \frac{3}{4}) = \mathrm{P}(X + X^2 \leq \frac{3}{4}) = \mathrm{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,
  denn $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ und $x \mapsto x + x^2$ wächst monoton auf $[0, \frac{1}{2}]$.