Stochastische Integration und Finanzmathematik SS 2016

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 9

Abgabe: 28.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei $b \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Betrachten Sie die SDE

$$dX = (b + \beta X)dt + \sigma\sqrt{X}dW, \quad X(0) = x_0 > 0,$$

mit Brown'scher Bewegung W. Definiere für $c \geq 0$ die Stoppzeit

$$\tau_c = \inf\{t \geq 0 | X(t) = c\}.$$

Entsprechend ist $\{\tau_0 = \infty\}$ das Ereignis, dass X die Null nicht trifft. Ziel dieser Übung ist es die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Ist $b \geq \frac{\sigma^2}{2}$, dann ist $\mathbb{P}(\tau_0 = \infty) = 1$.

(b) Ist $b < \frac{\sigma^2}{2}$ und $\beta \leq 0$, dann ist $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$.

(c) Ist $b < \frac{\sigma^2}{2}$ und $\beta > 0$, dann ist $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) \in (0, 1)$.

Gehen Sie wie folgt vor:

- Definieren Sie die Funktion

$$f(x) = \int_1^x e^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}y} y^{-\frac{2b}{\sigma^2}} dy, \quad x \geq 0,$$

und zeigen Sie dass $f(X)$ ein Lokalmartingal ist.

- Sei $0 < r < x_0 < R$, und definieren Sie die Stoppzeit $\tau_{r,R} = \tau_r \wedge \tau_R$. Zeigen Sie dass

$$f(X(t \wedge \tau_{r,R})) - f(x_0) = \int_0^t f'(X(s))\sigma\sqrt{X(s)}\mathbb{1}_{\{s \leq \tau_{r,R}\}} \, dW(s), \quad t \geq 0.$$

- Zeigen Sie dass es zwei Konstanten $M_1, M_2 > 0$ gibt die unabhängig von t sind für die gilt

$$M_1 \geq \mathbb{E}\left[(f(X(t \wedge \tau_{r,R})) - f(x_0))^2\right] \geq M_2\mathbb{E}\left[t \wedge \tau_{r,R}\right].$$

Hinweis: Zeigen Sie $\sigma^2 x f'(x)^2 \geq M_2$ für alle $x \geq r$.

Folgern Sie $\mathbb{E}[\tau_{r,R}] < \infty$ und damit $\tau_{r,R} < \infty$ fast sicher.

- Zeigen Sie $f(x_0) = \mathbb{E}[f(X(t \wedge \tau_{r,R}))] = \mathbb{E}[f(X(\tau_{r,R}))]$. *Hinweis: Zeigen Sie $f(X(t \wedge \tau_{r,R}))$ ist ein Martingal und nutzen Sie den Satz über die Majorisierte Konvergenz.*

Zeigen Sie nun die Identität

$$f(x_0) = f(r)\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) + f(R)\mathbb{P}(\tau_r > \tau_R).$$

Bitte wenden

- Nutzen Sie monotone Konvergenz und die Stetigkeit von X um

$$\lim_{r\to 0} \mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) = \mathbb{P}(\tau_0 < \tau_R), \lim_{r\to 0} \mathbb{P}(\tau_r > \tau_R) = \mathbb{P}(\tau_0 > \tau_R), \tau_R \uparrow \infty \text{ für } R \uparrow \infty$$

  zu zeigen. Sie dürfen annehmen, dass X eine eindeutige starke globale (für alle $t \geq 0$) Lösung hat.
- Nehmen Sie $b \geq \frac{\sigma^2}{2}$ an. Zeigen Sie $\lim_{r\to 0} f(r) = -\infty$. Folgern Sie (a).
- Nehmen Sie $b < \frac{\sigma^2}{2}$ an. Zeigen Sie $f(0) = \lim_{r\to 0} f(r)$ existiert in $\mathbb{R}$, und

$$\lim_{R\to\infty} f(R) = \begin{cases} = \infty, & \text{falls } \beta \leq 0 \\ \in \mathbb{R}, & \text{falls } \beta > 0. \end{cases}$$

  Folgern Sie (b) und (c).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein doppelt stochastisches Kredit-Ausfall-Modell mit $(\mathcal{G}_t)$-Brown'scher Bewegung W. Für $b \geq 0, \sigma > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, sei der Intensitätsprozess λ definiert als die Lösung der SDE

$$d\lambda = (b + \beta\lambda)dt + \sigma\sqrt{\lambda}dW, \quad \lambda(0) = \lambda_0 \geq 0.$$

Bestimmen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\tau \leq T|\mathcal{F}_t)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Characteristische Funktion des Prozesses X aus Aufgabe 1.