UNI FREIBURG

Stochastische Integration und Finanzmathematik **SS 2016**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 4

Abgabe: 24.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit Brownscher Bewegung (bzgl. der natürlichen Filtration) W, betrachten Sie den $\mathbb{R}$-wertigen Prozess X^x gegeben als die eindeutige Lösung der SDE

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad W_X = x.$$

Für $t \leq T$, definieren Sie die Funktion

$$g(t,x) = \mathbb{E}\left[h(X_T)|X_t = x\right],$$

für h stetig mit kompaktem Träger. Nehmen Sie an dass g glatt ist und zeigen Sie dass g die partielle Differentialgleischung

$$g_t(t,x) + b(x)g_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)g_{xx}(t,x) = 0, \quad g(T,x) = h(x)$$

erfüllt. *Hinweis: Betrachten Sie den Prozess* $g(t, X_t)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Betrachten Sie den Prozess B^H der definiert wird als stetiger, zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\mathbb{E}\left[B_s^H B_t^H\right] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),\ H \in (0,1).$$

Dieser Prozess wird **Fraktionelle Brownsche Bewegung** mit Hurst Parameter H genannt. Zeigen Sie

(a) B^H hat stationäre Inkremente.

(b) Der Prozess B_{at}^H ist ein Gaußprozess mit der selben Kovarianzfunktion wie der Gauß-Prozess $a^H B_t^H, a > 0$.

(c) Betrachten Sie den Zeitdiskreten Prozess $b_k^H = B_k^H - B_{k-1}^H, k \in \mathbb{N}, k > 0$. Was können Sie über diesen Prozess sagen?

Bitte wenden

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie den Prozess B^H aus der vorigen Aufgabe mit endlichem Zeithorizont T. Zeigen Sie dass dieser genau dann ein Semimartingal ist, wenn $H = 1/2$ gilt. Wenden Sie dazu das Theorem von Bichteler-Dellacherie an, das besagt dass ein Prozess $(X_t)_{t \leq T}$ genau dann ein Semimartingal ist, wenn für alle einfachen vorhersehbaren Folgen von Prozessen K^n mit

$$\sup_{t \leq T} |K_t^n| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$

folgt dass

$$(K^n \circ X)_T \xrightarrow{P} 0.$$

Sie dürfen hierbei nutzen, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} b_{k-1}^H b_k^H \xrightarrow{P} (2^{2H-1} - 1)$$

gilt.

Nachtrag zu dieser Aufgabe: Sie dürfen benutzen, dass für fast alle ω, $B^H(\omega)$ β-Hölderstetig ist für jedes $\beta < H$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Gegeben Sei ein Marktmodell mit einem Martingalmaß. Zeigen Sie dass wenn dieses vollständig ist, es genau ein Martingalmaß gibt.