Stochastische Integration und Finanzmathematik **SS 2016**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 10

Abgabe: 05.07.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Wir betrachten das folgende Intensitätsbasierende Kredit-Ausfall-Model: Die short-rate r ist gegeben als Lösung der SDE

$$dr = (b + \beta r)dt + \sigma\sqrt{r}dW, \quad r(0) \geq 0,$$

$b \geq 0, \beta \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Für die Intensität wählen wir

$$\lambda(t) = c_0 + c_1 r(t).$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\exp\left(-A(T-t) - B(T-t)r(t)\right),$$

wobei

$$A(u) = c_0 u - \frac{2b(1+c_1)}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\gamma e^{(\gamma-\beta)u/2}}{(\gamma-\beta)(e^{\gamma u}-1)+2\gamma}\right),$$

$$B(u) = (1+c_1)\frac{2(e^{\gamma u}-1)}{(\gamma-\beta)(e^{\gamma u}-1)+2\gamma},$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2(1+c_1)\sigma^2}.$$

Was können Sie über den Fall $c_1 = 0$ sagen?

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** In dieser Aufgabe wollen wir das Konzept von Forward-Maßen einführen. Wir betrachten das HJM-Zinsmodell ohne Kreditrisiko aus der Vorlesung. Wir nehmen die Existenz eines Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ an mit $\mathbb{Q}$-Brown'scher Bewegung W. Fixiere $T > 0$. Da

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{P(0,T)B(T)}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(T,T)}{P(0,T)B(T)}\right] = 1,$$

können wir ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q}^T \sim \mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}_T$ durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{P(0,T)B(T)}$$

definieren. Bestimmen Sie $d\mathbb{Q}^T/d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$. Stellen Sie dieses als stochastisches Exponential dar. Zeigen Sie ferner die folgende Aussage:

Bitte wenden

Für $T, S > 0$ gilt

$$\frac{P(t,S)}{P(t,T)} = \frac{P(0,S)}{P(0,T)} \mathcal{E}\left(\sigma_{S,T} \circ W^T\right)_t, \quad t \leq S \wedge T$$

ist ein $\mathbb{Q}^T$-Martingal, wobei wir definieren

$$\sigma_{S,T} = \int_S^T \sigma(t,u)du.$$

Ferner gilt

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\left(\sigma_{S,T} \circ W^T\right)_t, \quad t \leq S \wedge T$$

mit geeigneter $\mathbb{Q}^T$-Brown'scher Bewegung W^T. Geben Sie W_T explizit an.