Stochastische Integration und Finanzmathematik SS 2016

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 1

Abgabe: 26.04.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Diskrete Version der Ito-Formel:

Es seien $X := (X_n)_{0\le n\le N}$ und $Y := (Y_n)_{0\le n\le N}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit $X_0 = Y_0 = 0$ und $[X,Y] = ([X,Y]_n)_{0\le n\le N}$, wobei

$$[X,Y]_n := \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k, \quad \text{mit } \Delta X_k := X_k - X_{k-1} \text{ und } \Delta Y_k := Y_k - Y_{k-1}.$$

Ferner sei F eine (*absolut stetige*) Funktion mit $F(x) = F(0) + \int\limits_0^x f(y)\,dy$, wobei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion ist mit $\int\limits_{|y|\le c} |f(y)|\,dy < \infty$ für alle $c > 0$.

Eine Version des diskreten stochastischen Integrals von $f(X) := (f(X_n))_{0\le n\le N}$ bezüglich X ist definiert durch

$$I_n := (f(X)\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_{k-1})\Delta X_k, \quad 1 \le n \le N.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$F(X_n) = F(X_0) + I_n + \tfrac{1}{2}[X, f(X)]_n + R_n(X, f(X)), \tag{1}$$

wobei

$$R_n(X, f(X)) = \sum_{k=1}^{n} \int_{X_{k-1}}^{X_k} \Big(f(x) - \tfrac{1}{2}(f(X_k) + f(X_{k-1})) \Big) dx.$$

(b) Ist f'' stetig, so gilt (hier ist evtl. die aus Analysis 1 oder Numerischer Mathematik bekannte *Trapezregel* hilfreich)

$$R_n(X, f(X)) = -\frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(\Delta X_k)^3$$

für geeignete $X_{k-1} \le \eta_k \le X_k$. (Insbesondere gilt $R_n(X, f(X)) = 0$ für $f(x) = a + bx$, was in diesem Fall die Gleichung (1) deutlich vereinfacht.)

Bitte wenden

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Diskrete Version der Tanaka-Formel:

Es sei $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)$. Wir betrachten die einfache Irrfahrt $X = (X_n)_{n\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ und $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geq 1$, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $R(\xi_i = 1) = R(\xi_i = -1) = 1/2$. Für $x \in \mathbb{Z}$ sei $L_n(x) = \#\{0 \leq k < n, X_k = x\}$ die *Lokalzeit*, d.h. die Anzahl der "Besuche", der Irrfahrt in x bis zur Zeit n. Zeigen Sie mit Hilfe von (1)

$$|X_n - x| = |x| + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}(X_{k-1} - x)\Delta X_k + L_n(x).$$

Folgern Sie, dass sich die Anzahl der Besuche in 0 bis auf einen konstanten Faktor wie $\sqrt{n}$ verhält. Zeigen Sie dazu für $L_n := L_n(0)$

$$\mathbb{E}\left[L_n\right] \sim \sqrt{2n/\pi}, \quad n \to \infty.$$

Hier schreiben wir wie üblich $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$, falls $a_n/b_n \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ und $\mathcal{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei an dieselbe Filtration adaptierte stochastische càdlàg-Prozesse. Ferner sei $\mathcal{Y}$ von endlicher Variation. Zeigen Sie

(a) Besitzt $\mathcal{Y}$ stetig differenzierbare Pfade, so gilt

$$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X_s \dot{Y}_s ds.$$

Dabei bezeichnet der Punkt die Ableitung nach s.

(b) Ist $Y_t = \sum_{s\leq t} \Delta Y_s$ für alle $t > 0$, wobei $\Delta Y_s := Y_s - Y_{s-}$, (d.h. $\mathcal{Y}$ ist ein reiner Sprungprozess) dann gilt

$$\int_0^t X_s dY_s = \sum_{0<s\leq t} X_s \Delta Y_s.$$

Hinweis: In a) ist die Zerlegung $Y_t = Y_0 + \int_0^t |\dot{Y}_s| ds - \int_0^t (|\dot{Y}_s| - \dot{Y}_s) ds$ hilfreich, für die b) eine analoge.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden Lebesgue-Stieltjes-Integrale:

$$a) \int_0^t f(s)\ d\lfloor s \rfloor, \qquad b) \int_0^1 s\ ds^2 \qquad \text{und } c) \int_1^2 s\ d\log s.$$