UNI FREIBURG

Stochastische Integration und Finanzmathematik SS 2016

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 2

Abgabe: 03.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei E ein normierter Raum und $V \subset E$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Zeigen Sie: Wenn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ gilt, dass $x_n \overset{w}{\to} x$, dann folgt $x \in V$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)**.** Wir betrachten das folgende Marktmodell ($t \in [0,T]$ mit $T > 0$): Gegeben $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t\leq T}$, sei S die Lösung der SDE

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0 \text{ deterministisch.} \tag{1}$$

Dabei soll gelten $r, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ konstant. Ferner sei B der (deterministische) Prozess gegeben durch

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1. \tag{2}$$

Wir definieren den Prozess $X = S/B$.

(a) Lösen Sie die obigen Differentialgleichungen und leiten Sie die Dynamiken von X bzgl W her, dass heißt leiten Sie die SDE her mit brownsche Bewegung W deren Lösung gerade X ist. *Hinweis: Betrachten Sie* $S_t = \exp(L_t)$.

(b) Geben Sie alle äquivalenten Martingal-Maße für X bzgl. der natürlichen Filtration von W an. Nutzen Sie dabei das "Martingale representation theorem" sowie den Satz von Girsanov.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Gegeben sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Betrachten Sie den Zeitdiskreten Prozess $S = \{(S_t), t \in \{0,1\}\}$. Für gegebenes $S_0 = 1$ P-f.s., sei $S_1 \sim U_{[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]}$. Bestimmen Sie zwei äquivalente Martingalmaße für S bzgl. der natürlichen Filtration.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Aussage aus der Vorlesung, dass nur $\emptyset$ und L^p die konvexen offenen Mengen von $L^p((0,1)), p \in (0,1)$ sind. Nutzen Sie aus, dass durch

$$d(x,y) := \Delta(x-y)$$

eine vollständige translationsinvariante Metrik definiert wird, weshalb Sie sich auf solche Mengen beschränken können, die die Null enthalten.

***Theorem* 1** (**Martingale representation theorem**). Sei $W = (W_t)_{t\leq T}$ eine brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $(\mathscr{F}_t)_{t\leq T}$ die natürliche Filtration von W. Sei M ein Martingal bzgl. dieser Filtration. Dann existiert ein adaptierter Prozess Γ für den gilt:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma(u) dW(u).$$

Korrektur zum Satz von Hahn-Banach: Im Satz von Hahn Banach muss noch die Bedingung gestellt werden, dass B und C konvex sind.