Aufgabenpool
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016

Anmerkung: Diese Aufgabensammlung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit (im Sinne von Abdeckung der in der Vorlesung behandelten Themen) und soll lediglich zum Testen des Verständnisses zu einigen Theme der Vorlesung dienen. Als beste Übung für die Klausur empfehle ich nach wie vor die während des Semesters gestellten Übungsaufgaben.

Aufgabe 1

Es sei Ω ein diskreter Grundraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge von Ω. Außerdem seien von den Ereignissen $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cup B) = \frac{11}{20}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{20}, \quad P(B \setminus C) = \frac{1}{5}$$

Welche der nachstehenden Aussagen ist richtig?

(a) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$,

(b) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$,

(c) $P(B) = \frac{3}{20}$ und $P(A \cap B) = \frac{19}{20}$,

(d) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{5}$

Aufgabe 2

Seien $X_1, \ldots X_n$ die Ergebnisse von n unabhängigen Würfen eines fairen Würfels.

(a) Gegen welche Zahl konvergiert $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$? Begründen Sie dies.

(b) Ein Würfel wird so lange geworfen bis erstmals “3” auftritt. Dies geschieht nach W Würfen. Wie ist W verteilt?

(c) Bestimmen Sie $\mathbf{E}[W]$.

Aufgabe 3

Ein Freemail-Anbieter möchte zum Schutz seiner Kunden einen Spam-Filter anbieten. Dazu wird zunächst eine Untersuchung durchgeführt, die typische Eigenschaften von Spam-Mails bestimmen soll:
Es wurde festgestellt, dass Mails mit “XXX“ in der Betreffzeile zu 95% Spam-Mails sind. Mails bei denen “XXX“ nicht in der Betreffzeile auftaucht aber “Gewinnchance“

im Mailtext steht, sind zu 68% Spam-Mails. Unter den Mails, bei denen weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Mailtext steht, sind noch 18% Spam-Mails.
Insgesamt enthalten 82% der Mails weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Mailtext, bei 13% steht zwar "Gewinnchance" im Text, aber nicht "XXX" in der Betreffzeile und bei den übrigen 5% steht "XXX" in der Betreffzeile.
Gegeben eine Spam-Mail liegt vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Spam-Mail weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Text stehen hat?

Aufgabe 4

Von einer Gruppe von Personen, die aus 3 Frauen und 3 Männern besteht, soll ein Gruppenfoto gemacht werden.

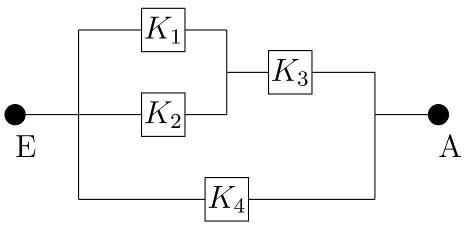
(a) Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, wenn die 6 Personen nebeneinander stehen?

(b) Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, wenn links die drei Männer und rechts die drei Frauen nebeneinanderstehen sollen?

(c) Bei den Personen handelt es sich um 3 Ehepaare. Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, auf denen die 6 Personen nebeneinanderstehen, wobei die Ehepartner aber nebeneinanderstehen?

Aufgabe 5

Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus, falls beide Komponenten K_3 und K_4, oder K_1 und K_2 gemeinsam mit K_4 ausfallen.



Unter der Annahme unabhängiger Defekte an den einzelnen Komponenten berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer gewissen Betriebsdauer das System ausfällt, wenn mit Wahrscheinlichkeit $p_i = \frac{i}{5}$ innerhalb dieses Zeitraums an der Komponente $K_i,\ 1 \leq i \leq 4$, ein Defekt auftritt.

Aufgabe 6
Gegeben sei folgender Algorithmus:

Algorithm 1 FindMax

INPUT: Unsortierter Vektor von n Zahlen $x_1, ..., x_n$
OUTPUT: $\max(x_1, ..., x_n)$

$\max \leftarrow x_1$
for $i \leftarrow 2, ..., n$ **do**
  if $x_i > \max$ **then** $\max \leftarrow x_i$
  end if
end for

Sei nun $\underline{\Sigma}$ eine zufällige Permutation der verschiedenen Zahlen $z_1, ..., z_n$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zuweisung $\max \leftarrow x_i$

(a) kein mal;

(b) $n - 1$-mal

ausgeführt wird?

Aufgabe 7
Gegeben sei der Algorithmus FindMax aus Aufgabe 6 für den Vektor $(1, ..., n)$. Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Überschreibungen $\max \leftarrow i$ bei zufälligem Input $\underline{X} = (\sigma(1), ..., \sigma(n))$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl an Überschreibungen.

Aufgabe 8
Aus einer Grundgesamtheit mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 werden 5 unabhängige Ziehungen durchgeführt, die Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_5$. Es werden die folgenden Schätzstatistiken betrachtet.

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \\
H_2 &= X_1 + X_2 \\
H_3 &= \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5
\end{aligned}$$

Welche dieser Schätzfunktionen sind erwartungstreu für μ? Erläutern Sie, warum der Mittelwert (der fünf Ziehungen) als Schätzfunktion, den angebenen Schätzern vorzuziehen ist.

Aufgabe 9
Eine Partei wird von 45% der Bevölkerung gewählt.

(a) Bei einer Umfrage werden 1000 zufällig ausgewählte Personen befragt. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 435 und höchstens 465 Befragte diese Partei wählen.

(b) Wie groß muss die Zahl der befragten Personen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 40% und höchstens die Hälfte der befragten Personen die Partei wählt?

Aufgabe 10
Eine Brauerei verkauft 0.5ℓ-Flaschen. Bei der Messung der Flüssigkeitsmenge in 10 befüllten Flaschen durch eine Verbraucherschutzorganisation ergaben sich die folgenden Werte (in ℓ):

0.482 0.479 0.502 0.508 0.497 0.496 0.503 0.489 0.483 0.491

Nehmen Sie an, dass die Daten Realisierungen von unabhängigen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsgrößen mit unbekanntem μ und σ^2 sind. Es soll nun getestet werden, ob die Füllmenge tatsächlich der Etikettierung entspricht. Testen Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests zum Niveau 5%, ob die Brauerei die Maschine tatsächlich auf eine Abfüllmenge von 0.5ℓ (oder mehr) eingestellt hat.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 11
Sie würfeln abwechselnd mit Ihrem Gegenspieler. Sie starten mit einem Anfangskapital von 1 Euro das folgende Spiel gegen Ihren Gegner, der mit 2 Euro startet. Jede Runde gewinnen Sie einen Euro von Ihrem Gegner, wenn eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 erscheint. Bei 5 und 6 verlieren Sie einen Euro an Ihren Gegner. Sie haben gewonnen, falls Ihr Gegner kein Geld mehr hat, und verloren, falls Sie keines mehr haben.

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraph und geben Sie die Übergangsmatrix der Markovkette an.

(b) Was ist Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit?

Aufgabe 12
Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 15xy^2 & \text{für } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie:
(a) die Randdichten f_X und f_Y,

(b) die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y \mid X = x)$,

(c) den bedingten Erwartungswert $E[Y \mid X = x]$.