Übungen zur Vorlesung
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 3
Abgabetermin: 09.05.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 8 (Maximum finden) (4 Punkte)
Gegeben sei folgender Algorithmus:

Algorithm 1 FindMax

INPUT: Unsortierter Vektor von n Zahlen $x_1, ..., x_n$
OUTPUT: $\max(x_1, ..., x_n)$

$\max \leftarrow x_1$
for $i \leftarrow 2, ..., n$ **do**
  if $x_i > \max$ **then** $\max \leftarrow x_i$
  end if
end for

Sei nun $\underline{\Sigma}$ eine zufällige Permutation der verschiedenen Zahlen $z_1, ..., z_n$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zuweisung $\max \leftarrow x_i$

(a) kein mal;

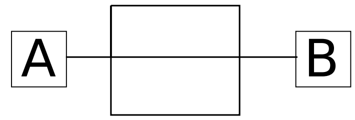
(b) genau einmal;

(c) $n-1$-mal

ausgeführt wird?

Aufgabe 9 (Quicksort) (4 Punkte)
Seien $\underline{z}$ und h wie in Beispiel 1.24 der Vorlesung, d.h. für eine Permutation σ der Zahlen $1, ..., 7$ liefert $h(\sigma)$ die Anzahl der Vergleiche, die Quicksort beim Input $\underline{z} \circ \sigma$ benötigt. Berechnen Sie $\mathbf{P}(h(\Sigma) = 10)$, falls $\underline{\Sigma}$ auf $\mathcal{S}_n$ gleichverteilt ist.

Aufgabe 10 (Datenübertragung) (4 Punkte)



Gegeben sei ein Netzwerk wie im Bild rechts. Solange 2 der 3 Leitungen funktionieren, können Daten von A nach B mit voller Geschwindigkeit übertragen werden, ansonsten wird die Übertragungsrate gedrosselt.
Jede Verbindung funktioniert unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1]$.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System ungedrosselt?

(b) Für welche Werte von p ist die Wahrscheinlichkeit aus (a) größer als p?

Aufgabe 11 (Poisson- und Exponentialverteilung) (4 Punkte)
Es seien zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben. Es sei X eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \text{ für } \lambda > 0.$$

Man sagt auch, dass X exponentialverteilt mit Parameter λ ist ($X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$).
Die Zufallsvariable Y sei $\mathbb{N}$-wertig mit Zähldichte

$$P(Y = k) = \frac{\mu^k}{k!} \exp(-\mu), \text{ für } \mu > 0, k \in \mathbb{N}.$$

In diesem Fall nennt man Y Poisson-verteilt mit Parameter μ ($Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$).

(a) Zeigen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

(b) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) = 1$.

(c) Berechnen Sie $P(X = 0.2)$ und $P(Y = 2)$.

(d) Berechnen Sie $P(X \geq Y)$ unter den Annahmen, dass X und Y unabhängig sind und $\lambda = \mu$ gilt.