Übungen zur Vorlesung
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 8
Abgabetermin: 20.06.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 29 (Verwerfungsmethode) (2 + 2 + 1 Punkte)
Sie möchten reellwertige Zufallszahlen simulieren, welche Dichte f besitzen. Hierfür gehen Sie nach der *Verwerfungsmethode* vor. Diese ist wie folgt definiert:

1. Es wird eine Folge von unabhängigen Zufallszahlen $x_1, u_1, x_2, u_2, ...$ generiert, wobei $u_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ uniform auf $[0,1]$-verteilt sind und x_n die Dichte g besitzen, wobei für g gilt, dass es ein $c < \infty$ gibt, sodass $f(x) \leq g(x)/c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Es ist $k_0 = 0$ und $k_i := \inf \left\{ n > k_{i-1} : u_n \leq c\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right\}$ für $i \geq 1$.
3. $y_i := x_{k_i}$ für $i \geq 1$ sind nun reellwertige Zufallszahlen mit Dichte f.

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus tatsächlich Zufallszahlen generiert, welche Dichte f besitzen. Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie für $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ und X mit Dichte g, dass

$$\mathbf{P}\left(U \leq c\frac{f(X)}{g(X)}, X \in A \right) = c \int_A f(x)dx,$$

für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbf{P}(k_1 = n, X_{k_1} \in A) = \left[\mathbf{P}\left(U > c\frac{f(X)}{g(X)} \right) \right]^{n-1} \mathbf{P}\left(U \leq c\frac{f(X)}{g(X)}, X \in A \right).$$

(c) Folgern Sie $\mathbf{P}(X_{k_1} \in A) = \int_A f(x)dx$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für $p \in [0,1)$ folgendes gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$.

Aufgabe 30 (Simulieren mit Verwerfungsmethode) (3 Punkte)
Es sollen nun gamma-verteilte Zufallszahlen mit Hilfe der Verwerfungsmethode aus Aufgabe 29 simuliert werden. Die Dichte der Gammaverteilung ist für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bx),$$

wobei $\Gamma(a)$ die Euler'sche Gammafunktion ist.
Im folgenden sei $b = 1$ und $a > 1$. Verwenden Sie für die Erzeugung der Zufallszahlen x_n die Dichte der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda \in (0, 1)$. Wie lautet die Bedingung an die Zufallszahlen u_n aus Schritt 2, sodass die Zufallszahl x_n nicht verworfen wird?

Aufgabe 31 (Gesetz der großen Zahlen für FindMax) (2 + 2 Punkte)
Gegeben sei der Algorithmus FindMax aus Aufgabe 8. Ferner sei $S_n(\sigma)$ die Anzahl an Umspeicherungen bei zufälligem Input $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Es gelten (wie in Aufgabe 28) die Abschätzungen

$$\ln(n) \leq \mathbf{E}[S_n(\Sigma)] \leq 1 + \ln(n) \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}[S_n(\Sigma)] \leq \ln(n).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{\mathbf{E}[S_n]} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 32 (Serveranfragen) (4 Punkte)
An einen Server werden 10.000 Anfragen gesendet, wovon jede mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4 beantwortet wird. Bestimmen Sie eine (möglichst kleine) Zahl N, sodass mit Wahrscheinlichkeit mindestens 3/4 die Anzahl der beantworteten Anfragen im Intervall $[7500 - N, 7500 + N]$ liegen. Verwenden Sie hierfür einmal die Tschebychev-Ungleichung (Proposition 4.1) und einmal den Satz von de Moivre-Laplace (Proposition 4.4).
Hinweis: Für die Verwendung des Satzes von de Moivre-Laplace finden Sie auf der Homepage eine Wertetabelle, in welcher Sie explizite Werte für die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung finden.