

Übungen zur Vorlesung “Markovketten”

Sommersemester 2016, Blatt 7

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016>

Abgabetermin: 04.07.2016 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 22 (Summen exponential verteilter Zufallsvariablen)

(5 Punkte)

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen und sei für $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

- Zeigen Sie, dass S_n gemäß $\text{Gamma}(n, \lambda)$ -Verteilung verteilt ist.
- Sei nun N eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\beta \in (0, 1)$, d.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = \beta(1 - \beta)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass S_N exponential verteilt ist mit Rate $\lambda\beta$.

Hinweis zu a): Die Gammaverteilung $\text{Gamma}(p, b)$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{p,b}(t) = \frac{b^p}{(p-1)!} t^{p-1} e^{-bt} \mathbb{1}\{t \geq 0\},$$

wobei $b > 0, p > 0$ reelle Parameter sind.

Aufgabe 23 (Rechnen mit Poissonprozessen)

(Übung)

- Wir betrachten rote und grüne Autos an einer Ampel ankommen. Deren Ankünfte werden durch zwei voneinander unabhängige Poissonprozesse mit Rate λ bzw. μ beschrieben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 6 rote Autos vor insgesamt 4 grünen Autos ankommen, wenn $\mu = 2\lambda$ ist.
- Ein Fischer fängt Fische zu Zeitpunkten, die Poissonverteilt sind mit Rate 2 (pro Stunde). Vier von Zehn Fischen sind Lachse, der Rest sind Thunfische. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Fischer genau ein Lachs und zwei Thunfische fängt, wenn er 2 1/2 Stunden fischt?

Aufgabe 24 (Superposition von Poissonprozessen)

(5 Punkte)

Es sei $(N^i)_{i \geq 1}$ eine Familie unabhängiger Poissonprozesse jeweils mit Intensität λ_i . Zeigen Sie, dass

- je zwei Poissonprozesse keine gemeinsamen Sprünge haben, und
- wenn $\lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$, dann ist $(N_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$N_t := \sum_{i=1}^{\infty} N_t^i$$

ein Poissonprozess mit Intensität λ .