Übungen zur Vorlesung "Markovketten"

Sommersemester 2016, Blatt 8

`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: Übung

Aufgabe 25 (Übung)

Sei $(\mathbf{P}(t))_{t\geq 0}$ eine Übergangshalbgruppe. Beweisen Sie, $\mathbf{P}(t)$ ist genau dann stetig für alle $t \geq 0$, wenn sie stetig im Ursprung ist.

Aufgabe 26 (Übung)

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit, Zustandsraum $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ und infinitesimaler Matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Markovkette in diskreter Zeit $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einen unabhängigen Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ an, so dass $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(\hat{X}_{N_t})_{t\geq 0}$ die gleichen Verteilungen haben.

Aufgabe 27 (Übung)

Es sei $\lambda\mu > 0$ und sei X eine Markovkette auf $\{1, 2\}$ mit Generator (Q-Matrix)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Vorwärtsgleichungen die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$.

b) Lösen Sie die Gleichung $\pi\mathbf{Q} = 0$ um die stationäre Verteilung zu finden. Zeigen Sie, dass $p_{ij}(t) \to \pi_j$ für $t \to \infty$.

c) Bestimmen Sie für die Markovkette
   (i) $P(X(t) = 2 | X(0) = 1, X(3t) = 1)$,
   (ii) $P(X(t) = 2 | X(0) = 1, X(3t) = 1, X(4t) = 1)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 28 (Übung)

Betrachten Sie eine Markovkette in stetiger Zeit mit Ratenmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Übergangshalbgruppe $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$. Bestimmen Sie die invariante Verteilung (π_1, π_2, π_3) als Linkseigenvektor von $\mathbf{Q}$ zum Eigenwert 0 und überzeugen Sie sich davon, dass $p_{ij}(t) \to \pi_j$ für $t \to \infty$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt.