Übungen zur Vorlesung
“Markovketten”

Sommersemester 2016, Blatt 6

`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: 27.06.2016 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 19 (Übung)

Ein Glücksspieler besitzt 2 €, braucht aber 10 € für das Taxi nach Hause. Das Casino bietet ihm folgendes Spiel an: Eine faire Münze wird geworfen. Falls der Glücksspieler auf die richtige Seite gesetzt hat erhält er das doppelte seines Einsatzes zurück, ansonsten verliert er den Einsatz. Da der Glücksspieler schnellstmöglich nach Hause möchte entscheidet er sich dafür sein komplettes Kapital einzusetzen falls es weniger oder gleich 5 € beträgt. Ansonsten setzt er so viel ein, dass das Kapital im Gewinnfall genau 10 € beträgt. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Markovkette, die sein Kapital beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass der Glücksspieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ zu Fuß gehen muss.

b) Wie groß ist die erwartete Anzahl von Münzwürfen bis das Spiel endet?

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$ mit $X_0 = 0$ und mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{01} = 1, \quad p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, \quad p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad i \geq 1.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{P}_0(X_n \geq 1, \forall n \geq 1) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Aufgabe 21 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $\{0, \ldots, 6\}$ mit dem Übergangsgraphen wie auf der nächsten Seite abgebildet.

Zeigen Sie:

a) Bei Start in 0 ist die Wahrscheinlichkeit jemals 6 zu treffen gegeben durch 1/4.

b) Bei Start in 1 ist die Wahrscheinlichkeit jemals 3 zu treffen gegeben durch 1.

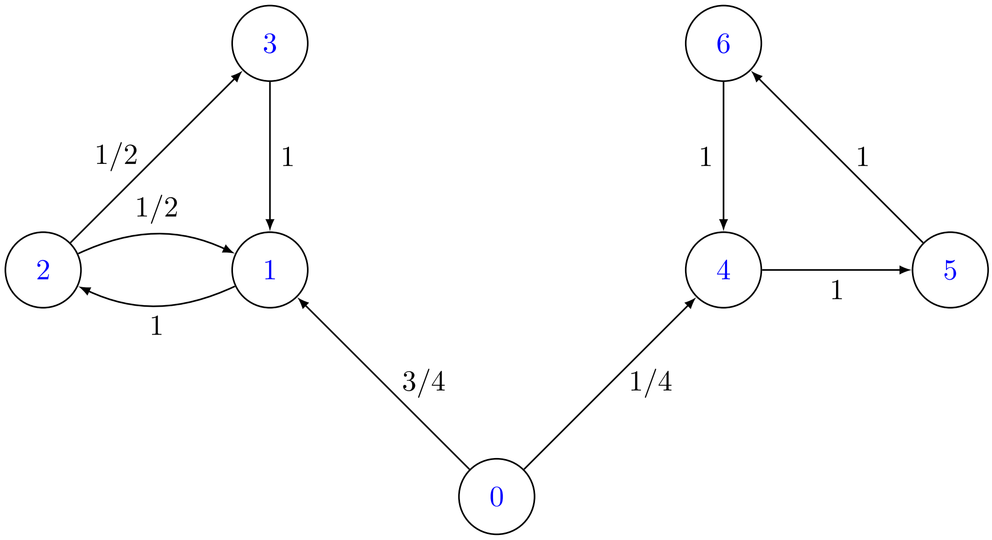
c) Bei Start in 1 braucht man im Mittel drei Sprünge bis 3 getroffen wird.

d) Bei Start in 1 verbringt man auf lange Sicht im Zustand 2 im Mittel 3/8 der Gesamtzeit.

e) $p_{01}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 9/32$

f) Was können Sie über $p_{04}^{(n)}$ für $n \to \infty$ sagen?

Bitte wenden!


3
6
1/2
1
1
1
1/2
2
1
4
5
1
1
3/4
1/4
0